2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 2.1 (*Le tore de révolution)*. On suppose $R > r > 0$.

1) Représenter la partie T de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

2) Montrer que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé 2.1 (*Le tore de révolution)*.

1) T est invariante par le groupe des rotations d'axe Oz. Plus précisément, si R_θ est la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle θ, alors $R_\theta(T) = T$ pour tout angle θ. Soit P_+ le demi-plan

$$P_+ = \{(x, 0, z)/x > 0\}.$$

T intersecte P_+ en le cercle C centré en $(R, 0, 0)$ de rayon r. Comme $\mathbb{R}^3$ est réunion des $R_\theta P_+$, T est réunion des $R_\theta C$. Dit autrement, on obtient T en faisant tourner C autour de l'axe Oz.

2) Soit la fonction f de $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2$$

Elle est de classe C^∞. En calculant la matrice jacobienne de f, on se convainc que r^2 est une valeur régulière de f, c'est à dire que $d_{(x,y,z)}f \neq 0$ lorsque $f(x, y, z) = r^2$. Par conséquent, $T = f^{-1}(r^2)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Exercice 2.2 (*Le double puits et le tore à deux trous)*.

1) Représenter la partie C_E de $\mathbb{R}^2 \ni (x, \xi)$ définie par l'équation

$$\xi^2 + V(x) = E$$

où E est un paramètre réel et $V(x) = 4x^2(x^2 - 1)$ est un potentiel qui présente un double puits. Lorsque $E = 0$, on pourra utiliser le paramétrage $(x, \xi) = (\cos\theta, \sin 2\theta)$. Pour quelle valeur de E est-ce une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

2) Montrer que la partie Σ de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$(4x^2(x^2 - 1) + y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Tracer les sections par les plans horizontaux et en déduire que cette sous-variété est un tore à deux trous.

Corrigé 2.2 (*Le double puits et le tore à deux trous*)**.**

1) Pour une fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque, on a que

$$C_E = \left\{(x, \pm\sqrt{E - V(x)})/V(x) \leqslant E\right\} \tag{1}$$

La différentielle de $\xi^2 + V(x)$ s'annule ssi $\xi = V'(x) = 0$. Donc si E vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad V(x) = E \Rightarrow V'(x) \neq 0,$$

C_E est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$

Appliquons ceci au potentiel $V(x) = 4x^2(x^2-1)$. La dérivée de V s'annule en $\pm 1/\sqrt{2}$ et 0. Et $V(0) = 0$, $V(\pm 1/\sqrt{2}) = -1$. On en déduit que pour $E < -1$, C_E est vide. Pour $E = -1$, C_E contient deux points $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$. Pour $-1 < E < 0$ et $0 < E$, C_E est une sous-variété de dimension 1. Avec (1), on voit que C_E est formé de deux cercles pour $-1 < E < 0$ et un cercle pour pour $0 < E$ [1] Toujours avec (1), on montre que lorsque E s'annule, C_E est formé de deux cercles qui se touchent. Pour analyser la situation au point où les deux cercles se rencontrent, on remarque que l'image γ de la courbe paramétrée $\theta \to (\cos\theta, \sin(2\theta))$ est incluse dans C_0, en effet

$$\sin^2(2\theta) = (2\cos\theta\sin\theta)^2 = 4\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta)$$

L'inclusion réciproque $C_0 \subset \gamma$ est vraie. Pour s'en convaincre, on peut représenter γ et comparer avec la représentation de C_0 obtenue par (1). Remarquons que l'origine de $\mathbb{R}^2$ est atteinte en $\theta = \pi/2$ modulo 2π et $\theta = 3\pi/2$ modulo 2π. Les vecteurs tangents en ces valeurs sont $(-1, -2)$ et $(1, -2)$. Ils ne sont pas colinéaires donc C_0 n'est pas une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$ (l'espace tangent en chaque point d'une variété de dimension 1 est une droite).

2) Pour montrer que Σ est une sous-variété, on vérifie que $1/4$ est valeur régulière de la fonction

$$(x, y, z) \to (4x^2(x^2 - 1) + y^2)^2 + z^2$$

Cela se fait sans difficulté en calculant la matrice jacobienne de f.

La surface de $\mathbb{R}^3$ que l'on obtient est un tore à deux trous. Pour le voir on détermine l'intersection Σ_c de Σ avec le plan horizontal $\{z = c\}$. Pour

[1] Par cercle, j'entend une courbe fermée. Plus précisément, on pourrait montrer qu'il s'agit de cercles à difféomorphime près. Pour cela, il faut savoir que toute variété connexe compacte de dimension 1 est difféomorphe à un cercle. Ensuite on montre que le niveau C_E est compact avec une ou deux composantes connexes selon que $0 < E$ ou $-1 < E < 0$.

$c < -1/2$ ou $c > 1/2$, Σ_c est vide. Pour $c = \pm 1/2$, Σ_c est le huit (ou lemniscate) C_0. Enfin pour $-1/2 < c < 1/2$,

$$\Sigma_c = C_E \cup C_{-E}, \qquad \text{avec } E = \sqrt{1/4 - c^2}.$$

Il s'agit de la réunion de trois cercles, avec un gros qui en contient deux petits.

Exercice 2.3 (*Tore à g trous)***.** Soit un entier naturel g et les disques $D = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ et D_1, ..., D_g donnés par

$$D_i = \{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leqslant r_i^2\}$$

On suppose que les D_i sont deux à deux disjoints et que $\operatorname{int} D_i \subset D$. Soit la fonction

$$f(x, y) = \big(R^2 - (x^2 + y^2)\big) \prod_{i=1}^{g} \big((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2\big).$$

Montrer que $M = \{z^2 = f(x, y)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, compacte et connexe. La représenter.

Corrigé 2.3 (*Tore à g trous)***.**

La fonction f prend des valeurs positives sur

$$C = D \setminus \bigcup_{i=1,\ldots,g} \operatorname{Int} D_i$$

et strictement négatives sur le complémentaire de C. Ainsi M est la réunion des graphes de g et $-g$ où g est la fonction

$$g : C \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \to \sqrt{f(x, y)}$$

On peut de la sorte se représenter facilement M et constater qu'il s'agit d'un tore avec g trous. On en déduit aussi que M est compacte et connexe. En effet C est compacte et connexe, l'image par une fonction continue d'une partie compacte (resp. connexe) est compacte (resp. connexe). Donc les graphes de g et $-g$ sont compacts et connexes. Enfin une réunion finie de parties compactes est compacte et une réunion de partie connexes ayant un point en commun est connexe.

Pour montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que 0 est une valeur régulière de la fonction $z^2 - f(x, y)$.

Exercice 2.4 (*Contre-exemples à un critère bien utile)*.

Soient X, Y des espaces métriques et f une application continue de X dans Y. f est dite propre si l'image réciproque de tout compact est un compact.

1) Montrer que f est propre ssi de toute suite (x_n) de X telle que $(f(x_n))$ converge on peut extraire une suite convergente.

2) Montrer que si f est propre elle est fermée. Par conséquent, une application continue, propre et injective dans des espaces métriques est un homéomorphisme sur son image.

3) Soit M, N deux variétés et $f : M \to N$ une application C^∞. D'après ce qui précède, si f est immersive, injective et propre alors c'est un plongement. Donner des contre-exemples à cette implication si l'on omet une des trois propriétés "immersive ", "injective " ou "propre ".

Corrigé 2.4 (*Sur un critère bien utile)*.

1) Le sens direct découle de la propriété de Bolzano-Weierstrass et du fait suivant : pour tout suite convergente (y_n) d'un espace topologique séparé, la partie $\{y_n/n \in \mathbb{N}\}$ est compacte. Cette propriété découle facilement de la définition de la compacité par les recouvrement d'ouverts.

La réciproque découle immédiatement de la propriété de Bolzano-Weierstrass.

2) Soit un fermé F de X. Montrons que $f(F)$ est fermé dans Y. Il suffit de montrer que toute suite convergente (y_n) de Y à valeurs dans $f(F)$ a sa limite dans $f(F)$. On a $y_n = f(x_n)$ pour $x_n \in F$. D'après la question précédente, f étant propre, quitte à remplacer y_n par une sous-suite, (x_n) converge. Sa limite x est dans F, car F est fermé. Et par continuité, $f(x)$ est la limite de (y_n).

3) Comme exemple d'application immersive et propre qui n'est pas injective (et donc pas un plongement), on peut considérer la lemniscate paramétrée par le tore :

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2, \quad [\theta] \to (\cos(\theta), \sin(2\theta))$$

Elle est propre car le tore est compact et on se convainc sans peine qu'elle est immersive.

Une immersion injective non propre est donnée par

$$f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}^2, \qquad t \to (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$$

Ce n'est pas un plongement car la suite $t_n = -1 + 1/n$ n'est pas convergente dans $]-1, \infty[$ et pourtant la suite $f(t_n)$ converge dans $f(]-1, \infty[)$ vers $(0, 0) = f(1)$.

Enfin, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie t sur (t^2, t^3) est injective, propre sans être une immersion.

Exercice 2.5 (*Théorème de Kronecker et droite de pente irrationnelle).*

1) Montrer qu'un sous-groupe du tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ engendré par un élément et de cardinal infini est dense.

2) Soit α un nombre irrationnel. Montrer que l'application j de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$ qui envoie t sur $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi\alpha t), \sin(2\pi\alpha t))$ est une immersion injective.

3) Quelle est l'adhérence de l'image de j ? En déduire que l'image de j n'est pas une sous-variété.

Corrigé 2.5 (*Théorème de Kronecker et droite de pente irrationnelle).*

1) On note π la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Soit α dans $\mathbb{R}$ et G le sous-groupe de $\mathbb{T}$ engendré par $\pi(\alpha)$. G est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou bien cyclique. Le second cas se produit ssi $p\pi(\alpha) = 0$ pour un entier p ssi $p\alpha \in \ker \pi$ ssi α est rationnel. Donc G est de cardinal infini ssi α est irrationnel ce que l'on suppose désormais.

Rappelons qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est ou bien dense ou bien engendré par un élément. Il est impossible que $\pi^{-1}(G) = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ soit engendré par un seul élément x car on aurait $1 \in x\mathbb{Z}$ et $\alpha \in x\mathbb{Z}$, ce qui implique α rationnel. Donc $\pi^{-1}(G)$ est dense et par conséquent G aussi comme image d'une partie dense par une application continue surjective.

2) L'injectivité découle du fait que α soit rationnel. Pour montrer que l'application est immersive il suffit de montrer que sa jacobienne ne s'annule pas, ce qui se vérifie facilement.

3) Montrons que l'adhérence de l'image de j est $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$. Comme $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est un fermé contenant l'image de j, il contient aussi son adhérence. Pour montrer l'inclusion réciproque, on identifie $\mathbb{S}^1$ avec le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, par l'homéomorphisme qui envoie $(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ sur $[x]$. L'intersection de $j(\mathbb{R})$ avec $\{0_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{S}^1$ (resp. $\mathbb{S}^1 \times \{0_{\mathbb{R}^2}\}$) est le sous groupe $\{0\} \times [\alpha]\mathbb{Z}$ (resp. $[\alpha^{-1}]\mathbb{Z} \times \{0\}$) de $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$. D'après ce qui précède, $[\alpha]\mathbb{Z}$ et $[\alpha^{-1}]\mathbb{Z}$ sont denses dans $\mathbb{T}$ donc leur produit est dense dans $\mathbb{T}^2$. $j(\mathbb{R})$ étant un sous-groupe du tore, il contient $[\alpha^{-1}]\mathbb{Z} \times [\alpha]\mathbb{Z}$. Par conséquent, $j(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$.

Comme on le montre dans l'exercice suivant, une sous-variété est une partie localement fermée, c'est-à-dire qu'elle est ouverte dans son adhérence. A supposer que $j(\mathbb{R})$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^4$, elle serait ouverte dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. C'est impossible car $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus j(\mathbb{R})$ est aussi une partie dense de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Cela peut de déduire du théorème de Baire. On peut aussi le montrer de façon élémentaire. Tout d'abord $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus j(\mathbb{R})$ contient au moins un élément x, donc il contiendra $x + j(\mathbb{R})$ car $j(\mathbb{R})$ est un sous-groupe et on

conclut avec la densité de $j(\mathbb{R})$. Un autre argument qui contredit que $j(\mathbb{R})$ est ouverte dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ utilise le lemme de Sard. L'application $j : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ étant lisse et la dimension de $\mathbb{R}$ strictement inférieure à celle de $\mathbb{T}^2$, par le lemme de Sard, $j(D)$ est une partie négligeable de $\mathbb{T}^2$. Mais la seule partie ouverte et négligeable de $\mathbb{T}^2$ est la partie vide.

Exercice 2.6 (*Partie localement fermée)***.** On rappelle qu'une partie E d'un espace topologique X est localement fermée si tout point de E admet un voisinage V tel que $V \cap E = V \cap F$ avec F un fermé.

1) Vérifier qu'une sous-variété est une partie localement fermée.

2) Vérifier qu'une partie E est localement fermée ssi elle est intersection d'un ouvert et d'un fermé ssi elle est intersection de son adhérence et d'un ouvert.

Corrigé 2.6 (*Partie localement fermée)***.**

1) Si N est une sous-variété de M, pour tout point x de M, il existe une carte (U, φ, E) et un sous-espace vectoriel F de E tels que $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap F$. φ étant un homéomorphisme, $U \cap N$ est une partie fermée de U ssi $\varphi(U \cap N)$ est une partie fermé de $\varphi(U)$. C'est bien le cas car un sous espace vectoriel de dimension finie F est une partie fermée.

2) N ouverte dans son adhérence signifie qu'il existe un ouvert O tel que $N = \bar{N} \cap O$. Cela implique immédiatement que N est localement fermée. Montrons la réciproque.

Supposons que pour un ouvert U et un fermé F, l'on ait $U \cap N = U \cap F$. Montrons alors que $U \cap N = U \cap \bar{N}$. Il suffit de montrer que tout x de $U \cap \bar{N}$ appartient à $U \cap N$. Étant donné la caractérisation de l'adhérence des parties d'un espace métrique, il existe une suite (x_n) à valeurs dans N qui converge vers x. Comme U est un voisinage de x, cette suite prend ses valeurs dans U à partir d'un certain rang. Comme $U \cap N = U \cap F$, (x_n) F prend ses valeurs dans F à partir d'un certain rang. F étant fermé, la limite x appartient à F. Donc $x \in U \cap N$.

D'après ce qui précède si N est une partie localement fermée, tout point x de N admet un voisinage ouvert U_x tel que $U_x \cap N = U_x \cap \bar{N}$. La réunion O des U_x est ouverte. On vérifie facilement que $N = O \cap \bar{N}$.

Cette caractérisation des parties localement fermées est plus généralement vraie pour un espace topologique.