3 Sphères, tores et projectif.

On présente dans ces exercices trois familles importantes de variétés qui sont les sphères, les tores et les espaces projectifs réels. Le but est aussi de se familiariser avec les cartes, d'expliciter quelques changements de cartes et des expressions d'applications dans les cartes.

On rappelle qu'une carte (U, φ, E) d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est la donnée d'un ouvert U de X, d'un espace vectoriel E de dimension finie et d'une application $\varphi : U \to E$ qui est un homéomorphisme sur son image. Deux cartes (U, φ, E) et (V, ψ, F) sont compatibles si l'application de changement de cartes

$$\varphi(U \cap V) \to \Psi(U \cap V), \qquad x \to \psi(\varphi^{-1}(x))$$

est un difféomorphisme. Une structure de variété sur X est la donnée d'un atlas $\mathcal{A}$, c'est à dire d'un ensemble de cartes deux à deux compatibles dont les domaines recouvrent X.

Exercice 3.1 (*Cercle et Sphères)*. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de la topologie induite. On note $N = (1, 0, \ldots, 0)$ et $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ les pôles nord et sud respectivement.

1) Vérifier que les projections stéréographiques p_N et p_S par rapport aux pôles nord et sud sont des homéomorphismes de $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ respectivement sur $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que l'on définit ainsi deux cartes compatibles de $\mathbb{S}^n$, qui munissent la sphère d'une structure de variété.

3) Vérifier que l'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer qu'une application $f : X \to \mathbb{S}^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi $i \circ f$ l'est. Utiliser ce critère pour construire une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{S}^p$ dans $\mathbb{S}^{p+n}$

Corrigé 3.1 (*Cercle et Sphères)*.
1) Pour établir la continuité des projections stéréographiques et de leurs inverses, on les exprime en fonction des coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^n$. Les applications apparaissent alors comme restrictions d'applications continues. On conclut avec le critère suivant : pour toute application continue $f : X \to Y$ et parties A et B de X et Y telles que $f(A) \subset B$, l'application $g : A \to B$ qui envoie x sur $f(x)$ est continue si A et B sont munis de la topologie induite.

Les coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ de la projection stéréographique par rapport au pôle nord du point de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ sont

$$y_i = \frac{x_i}{1 - x_0}$$

D'où la continuité de p_N. Réciproquement, comme $\sum x_i^2 = 1$,

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1 - x_0^2}{(1 - x_0)^2} = \frac{1 + x_0}{1 - x_0}$$

l'on tire alors x_0 puis $x_1, \dots x_n$ en fonction des y_i :

$$x_0 = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}, \qquad x_i = \frac{2y_i}{1 + |y|^2}.$$

On en déduit que la réciproque de p_N est continue. De même, les coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ de la projection par rapport au pôle sud sont

$$z_i = \frac{-x_i}{1 + x_0}, \qquad x_0 = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}, \qquad x_i = \frac{2z_i}{1 + |z|^2}.$$

2) Par conséquent, $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, p_N, \mathbb{R}^n)$ et $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, p_S, \mathbb{R}^n)$ sont deux cartes. Leurs domaines recouvrent la sphère. Ils s'intersectent en $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$. L'application de changement de carte envoie $p_N(U) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur $p_S(U) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On déduit des formules précédentes l'expression de l'application et son inverse en coordonnées

$$z_i = -\frac{y_i}{|y|^2}, \qquad y_i = -\frac{z_i}{|z|^2}$$

Donc l'application est bien un difféomorphisme.

3) L'expression de $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dans la carte $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, p_N, \mathbb{R}^n)$ est l'application

$$i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad (y_1, \dots, y_n) \to (1 + |y|^2)^{-1}(|y|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n)$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. et il en est de même pour l'expression de i dans la carte obtenue par projection stéréographique par rapport au pôle sud. Par conséquent i est $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $f : X \to \mathbb{S}^n$ telle que $i \circ f$ est lisse. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme cela se ramène à une vérification dans les cartes, on peut supposer que X est un ouvert d'un espace vectoriel. L'expression de f dans la carte $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, p_N, \mathbb{R}^n)$ est l'application $p_N \circ f : f^{-1}(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \to \mathbb{R}^n$. Or p_N se factorise en $\Pi_N \circ i$ où Π_N est l'application lisse de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_0 = 1\}$ dans $\mathbb{R}^n$

$$(x_0, \dots, x_n) \to (1 - x_0)^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

Et $i \circ f$ $\mathcal{C}^\infty$ implique que $p_N \circ f = \Pi_N \circ (i \circ f)$ est $\mathcal{C}^\infty$. On raisonne de la même façon pour la deuxième carte.

Enfin, l'inclusion de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{p+n}$ étant $\mathcal{C}^\infty$, sa composition j avec l'injection $\mathbb{S}^p \to \mathbb{R}^p$ l'est aussi. L'image de j étant incluse dans $\mathbb{S}^{n+p}$, on a $j = f \circ i$ où i est l'injection $\mathbb{S}^{n+p} \to \mathbb{R}^{p+n}$. D'après ce qui précède, f est une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

Exercice 3.2 (*Tore de dimension 1)*. Soit $\mathbb{T}$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et p la projection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}$. L'on pose pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{T}$

$$d(\xi, \eta) = \inf_{x \in p^{-1}(\xi),\, y \in p^{-1}(\eta)} |x - y|.$$

1) Montrer que pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{T}$ et tout $x \in p^{-1}(\xi)$, il existe $y \in p^{-1}(\eta)$ tel que $d(\xi, \eta) = |x - y|$. En déduire que d est une distance du tore. Montrer que le tore muni de la topologie associée est compact et connexe.

2) Définir à partir de la restriction de p à $]0, 1[$ et $]1/2, 3/2[$ deux cartes compatibles du tore, puis une structure de variété.

3) Montrer que la projection p est lisse et qu'une application $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est lisse ssi $f \circ \pi$ l'est.

4) Montrer que le tore et le cercle $\mathbb{S}^1$ sont difféomorphes.

Corrigé 3.2 (*Tore de dimension 1)*.

1) En remarque préliminaire, observons que pour tout η dans $\mathbb{T}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[t, t + 1[$ contient exactement un représentant de η. Soit $x \in \mathbb{R}$, considérons $y \in [x - 1/2, x + 1/2]$. Alors $|y - x| \leqslant 1/2$ et pour tout entier $n \neq 0$,

$$|y - x + n| \geqslant |n| - |y - x| \geqslant 1 - 1/2 = 1/2.$$

Par conséquent $d(p(x), p(y)) = |x - y|$.

On en déduit facilement que d est une distance. Par exemple, pour tout ξ, η, ζ dans $\mathbb{T}$, d'après ce qui précède, il existe x, y et z représentants de ξ, η et ζ tels que $d(\xi, \eta) = |x - y|$ et $d(\eta, \zeta) = |y - z|$. Ainsi

$$d(\xi, \zeta) \leqslant |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| = d(\xi, \eta) + d(\eta, \zeta),$$

la première inégalité découlant de la définition de d.

La projection p étant lipschitzienne, elle est continue. Le tore étant l'image du segment compact et connexe $[0, 1]$ par p, il est compact et connexe.

2) Comme on l'a vu, la restriction de p à tout intervalle ouvert de longueur $\leqslant 1/2$ est une isométrie. Donc p est un homéomorphisme local. La restriction de p à $]0, 1[$ étant injective, p induit alors un homéomorphisme de $]0, 1[$ sur $p(]0, 1[) = \mathbb{T} \setminus \{p(0)\}$. Notons $\varphi_{]0,1[}$ son inverse. Ceci nous définit

une carte $(\mathbb{T} \setminus \{p(0)\}, \varphi_{]0,1[}, \mathbb{R})$. En inversant p sur $]1/2, 3/2[$ on obtient une deuxième carte $(\mathbb{T} \setminus \{p(1/2)\}, \varphi_{]1/2,3/2[}, \mathbb{R})$. L'application de changement de carte est

$$]0, 1/2[\cup]1/2, 1[\to]1/2, 1[\cup]1, 3/2[, \quad x \to \begin{cases} x \text{ si } x \in]1/2, 1[\\ x + 1 \text{ si } x \in]0, 1/2[. \end{cases}$$

C'est un difféomorphisme et les deux domaines de cartes recouvrent le tore. Les deux cartes forment donc un atlas.

3) L'expression de la projection $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ dans la première carte $(\mathbb{T} \setminus \{p(0)\}, \varphi_{]0,1[}, \mathbb{R})$ est l'application

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[\to]0, 1[, \quad x \to x - k \text{ si } x \in]k, k+1[$$

Elle est $\mathcal{C}^\infty$ et l'on montre de la même façon que l'expression de p dans la deuxième carte est $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent p est lisse.

p étant lisse, si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est lisse, $f \circ p$ l'est aussi. Vérifions la réciproque. L'expression de f dans la première carte de $\mathbb{T}$ est $f \circ \varphi^{-1}_{]0,1[}$, qui n'est autre autre que la restriction de $f \circ p$ à $]0, 1[$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ si $f \circ p$ l'est. Il en est de même pour l'expression de f dans la deuxième carte.

4) Montrons que l'application Ψ du tore dans le cercle qui envoie la classe de $x \in \mathbb{R}$ sur $(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ est un difféomorphisme. Ψ est clairement une bijection. On déduit de la question 3) de cet exercice, de la question 3) de l'exercice précédent et du fait que

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad x \to (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

est $\mathcal{C}^\infty$ que Ψ l'est. On va le retrouver en écrivant l'expression de Ψ dans les cartes ce qui nous permettra de plus de montrer que la réciproque de Ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Remarquons que Ψ met en bijection $\mathbb{T} \setminus \{p(0)\}$ avec $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ et $\mathbb{T} \setminus \{p(1/2)\}$ avec $\mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$. Donc il suffit de considérer l'expression de Ψ dans les cartes correspondantes. Pour $(\mathbb{T} \setminus \{p(0)\}, \varphi_{]0,1[}, \mathbb{R})$ et $(\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}, p_N, \mathbb{R})$, il s'agit de l'application

$$]0, 1[\to \mathbb{R}, \qquad x \to \frac{\sin(2\pi x)}{1 - \cos(2\pi x)}$$

qui est clairement $\mathcal{C}^\infty$. Un calcul montre que sa dérivée ne s'annule en aucun point, donc sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il en est de même pour l'expression de Ψ dans les cartes $(\mathbb{T} \setminus \{p(1/2)\}, \varphi_{]1/2,3/2[}, \mathbb{R})$ et $(\mathbb{S}^1 \setminus \{S\}, p_S, \mathbb{R})$:

$$]1/2, 3/2[\to \mathbb{R}, \qquad x \to \frac{-\sin(2\pi x)}{1 + \cos(2\pi x)}$$

Les réciproques de ces applications étant les expressions de Ψ^{-1} dans les mêmes cartes, et $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$, $\mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$ recouvrant le cercle, on en déduit que Ψ^{-1} est lisse.

Exercice 3.3 (*Espace projectif*)**.** On définit l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la projection naturelle.

1) Pour $i = 0, \ldots, n$, on considère l'ensemble $V_i \subset \mathbb{P}^n$ des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et l'on définit φ_i l'application $V_i \to \mathbb{R}^n$ qui associe à une droite son intersection avec l'hyperplan affine $\{x^i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$. Vérifier que l'on définit ainsi des cartes compatibles qui recouvrent le projectif.

2) Montrer que la projection p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'une fonction $f : \mathbb{P}^n \to X$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi $f \circ p$ l'est.

3) Identifier $\mathbb{P}^n$ avec le quotient de la sphère $\mathbb{S}^n$ par la relation d'antipodie. Munir alors $\mathbb{P}^n$ de la distance

$$d'(\overline{x}, \overline{y}) := \inf(d(x, y), d(x, -y))$$

où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les classes d'équivalence de $x, y \in \mathbb{S}^n$ respectivement. Ici d désigne la restriction de la distance euclidienne à la sphère. Montrer qu'il s'agit bien d'une distance et qu'elle définit la même topologie que celle provenant de la la structure de variété. En déduire que $\mathbb{P}^n$ est séparé, compact et connexe.

4) Montrer que $\mathbb{P}^1$ est difféomorphe au cercle.

Exercice 3.4 (*Projectif*)**.** Pour $(x_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul, on note $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ la droite passant par le point de coordonnées (x_i). Les x_i s'appellent les coordonnées homogènes, remarquer qu'il ne s'agit pas de coordonnées à strictement parler :

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [y_0 : \ldots : y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x_0, \ldots x_n) = \lambda(y_0, \ldots, y_n)$$

L'on a $V_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] / \ x_i \neq 0\}$. L'application de carte est

$$\varphi_i : V_i \to \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : \ldots : x_n] \to \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Son inverse est

$$\mathbb{R}^n \to V_i, \qquad (y_1, \ldots, y_n) \to [y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : y_n]$$

Ceci nous définit des cartes $c_i = (V_i, \varphi_i, \mathbb{R}^n)$. Vérifions que c_1 est compatible avec c_2. D'une part, $\varphi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n \backslash \{y_1 = 0\}$ et $\varphi_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n \backslash \{y_1 = 0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. L'application de changement de cartes est

$$\varphi_1(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2(V_2 \cap V_1), \qquad (y_i) \to \frac{1}{y_1}(1, y_2, \ldots, y_n)$$

qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. De la sorte on établit que les cartes sont deux à deux compatibles. Les V_i recouvrant le projectif, les c_i forment donc un atlas.

2) L'expression de la projection p dans la i-ième carte est l'application

$$p^{-1}(V_i) = \mathbb{R}^n \backslash \{x_i = 0\} \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \to \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Elle est $\mathcal{C}^\infty$ et donc p aussi.

Soit $f : \mathbb{P}^n \to X$ une application telle que $f \circ p$ est $\mathcal{C}^\infty$. Montrons que f l'est aussi. Comme il suffit de raisonner dans les cartes on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'expression de f dans la i-ième carte est

$$\varphi_i(V_i) = \mathbb{R}^n \to X, \qquad (y_1, \ldots, y_n) \to f([y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : y_n]$$

On reconnaît la restriction de $f \circ p$ à $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \ x_i = 1\}$ qui est bien entendu $\mathcal{C}^\infty$.

3) La vérification que d est une distance est en tout point similaire à ce qui a été fait pour le tore dans la question 1) de l'exercice précédent. La projection p étant lipschitzienne, elle est continue si le projectif est muni de la topologie associée à d. Le projectif étant l'image par une application continue de la sphère qui est compacte et connexe, il est compact et connexe. On remarquera enfin que si x et y sont deux points de la sphère tels que $|x - y| \leqslant 1$, alors

$$d(x, -y) = |x + y| = |x - y + 2y| \geqslant |2y| - |x - y| \geqslant 2 - 1 = 1 \geqslant |x - y|$$

Donc $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$. Ainsi la projection p est localement une isométrie, et donc un homéomorphisme local.

Vérifions que la topologie $\mathcal{T}$ associée à d est la même que celle obtenue par recollement des cartes. Pour cela il suffit de montrer que pour chaque carte $(V_i, \varphi_i, \mathbb{R}^n)$, V_i est un ouvert de $\mathcal{T}$ et φ_i est un homéomorphisme de V_i sur $\mathbb{R}^n$.

V_i est ouvert car c'est l'image par la projection p de l'hémisphère ouverte

$$U_i = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n / \ x_i > 0\},$$

et p étant un homéomorphisme local, elle est ouverte. De plus, la restriction p_i de p à U_i étant injective, p_i est un homéomorphisme de U_i sur V_i. Par conséquent, φ_i est un homéomorphisme ssi $\varphi_i \circ p_i$ l'est, ce qui est clair au vu des expressions en coordonnées de

$$\varphi_i \circ p_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \quad (x_0, \ldots, x_n) \to \frac{1}{x_i}(x_0, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n)$$

et de son inverse

$$\mathbb{R}^n \to U_i, \quad (y_1, \ldots, y_n) \to \frac{1}{1 + \|y\|^2}(y_0, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_n)$$

4) Montrons que l'application Ψ du tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans la droite projective qui envoie la classe de x sur $[\cos(\pi x), \sin(\pi x)]$ est un difféomorphisme. On se convainc sans peine que c'est une bijection. Rappelons que l'on a défini deux cartes sur le tore,

$$(\mathbb{T} \setminus \{p(0)\}, \varphi_{]0,1[}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathbb{T} \setminus \{p(1/2)\}, \varphi_{]1/2,3/2[}, \mathbb{R})$$

et deux cartes sur la droite projective

$$(\mathbb{P}^1 \setminus \{[1:0]\}, \varphi_0, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathbb{P}^1 \setminus \{[0,1]\}, \varphi_1, \mathbb{R}).$$

Comme $\Psi([0]) = [0:1]$ et $\Psi([1/2]) = [0:1]$, Ψ met en bijection $\mathbb{T} \setminus \{p(0)\}$ avec $\mathbb{P}^1 \setminus \{[0:1]\}$ et $\mathbb{T} \setminus \{p(1/2)\}$ avec $\mathbb{P}^1 \setminus \{[1:0]\}$. Donc pour s'assurer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ainsi que son inverse il suffit de montrer que $\varphi_1 \circ \Psi \circ \varphi_{]0,1[}^{-1}$ et $\varphi_0 \circ \Psi \circ \varphi_{]1/2,3/2[}^{-1}$ sont des difféomorphismes. C'est bien le cas car

$$\varphi_1 \circ \Psi \circ \varphi_{]0,1[}^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}, \quad x \to \tan(\pi x)$$

et

$$\varphi_0 \circ \Psi \circ \varphi_{]1/2,3/2[}^{-1} :]1/2,3/2[\to \mathbb{R}, \quad x \to \operatorname{cotan}(\pi x)$$

Pour conclure, quelques remarques.

Cartes. On a systématiquement utilisé les cartes. Cependant, on verra par la suite qu'il est souvent plus élégant et efficace de les éviter. □

Quotient. Les propriétés énoncées dans les questions 3) de l'exercice sur le tore et 2) de l'exercice sur l'espace projectif sont importantes pour deux raisons. En pratique elles permettent de vérifier que des applications dont la source ou le but est le tore ou le projectif sont lisses sans faire appel aux cartes. D'autre part elles caractérisent la structure de variété du tore et du

projectif. Considérons par exemple le cas du tore munis de deux atlas $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, ce qui nous définit deux variétés $(\mathbb{T}, \mathcal{A}_1)$ et $(\mathbb{T}, \mathcal{A}_2)$. Supposons que pour $i = 1$ et 2, la projection $p_i : \mathbb{R} \to (\mathbb{T}, \mathcal{A}_i)$ soit lisse et que pour toute application $f : (\mathbb{T}, \mathcal{A}_i) \to \mathbb{R}$, f est lisse ssi $f \circ p_i$ l'est. On montre alors que l'application identité

$$\mathrm{Id}_{12} : (\mathbb{T}, \mathcal{A}_1) \to (\mathbb{T}, \mathcal{A}_2)$$

est un difféomorphisme. En effet, la projection $p_2 : \mathbb{R} \to (\mathbb{T}, \mathcal{A}_2)$ étant $\mathcal{C}^\infty$ et égale à $\mathrm{Id}_{12} \circ p_1$, Id_{12} est $\mathcal{C}^\infty$. Sa réciproque est $\mathcal{C}^\infty$ par un raisonnement similaire où l'on échange le rôle de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$. □

Sous-variété. La remarque précédente est aussi valable pour la sphère. Cette fois-ci la structure de variété ne vient pas par un quotient mais par l'injection de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. L'on montre comme ci-dessus que la structure de variété est uniquement déterminée par les propriétés énoncées dans la question 3). Cette propriété est caractéristique des sous-variétés. □

Variétés de dimension 1. On a vu que le tore de dimension 1, le cercle et la droite projective réelle sont difféomorphes. Plus généralement, on montre que toute variété unidimensionnelle compacte et connexe est difféomorphe au cercle. □

Dimension supérieure. Pour $n \geqslant 2$, l'on a introduit deux variétés de dimension n qui sont la sphère et l'espace projectif. L'on peut aussi considérer le tore $\mathbb{T}^n$ qui est défini comme le produit de n copies du tore de dimension 1. A la différence de la dimension 1, ces variétés ne sont pas difféomorphes. Elles ne sont pas même homéomorphes. Pour le démontrer on peut faire appel aux groupes fondamentaux qui sont l'objet du cours intitulé "revêtements et groupes fondamentaux". A tout espace topologique l'on associe un groupe dit groupe fondamental. Si deux espaces topologiques sont homéomorphes, leur groupe fondamentaux sont isomorphes. Donc deux espaces de groupes fondamentaux non-isomorphes ne peuvent être homéomorphes. Ceci s'applique à $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{P}^n$ et $\mathbb{T}^n$ dont les groupes fondamentaux pour $n \geqslant 2$ sont respectivement le groupe à un élément, le groupe à deux éléments et $\mathbb{Z}^n$. L'on dispose d'autres invariants topologiques pour distinguer ces espaces, par exemple les nombres de Betti qui seront définis dans un chapitre ultérieur du cours. A toute variété compacte de dimension n, l'on associe $n + 1$ entiers positifs notés $b_0(M)$, ..., $b_n(M)$. Le premier nombre de Betti est le nombre de composantes connexes, les autres sont plus subtils à définir. Deux

variétés homéomorphes ont mêmes nombres de Betti. Enfin

$$b_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad , \quad b_k(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{k}$$

$$b_k(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \text{ ou } n \text{ avec } n \text{ impair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On remarquera que les nombres de Betti ne permettent pas de distinguer les sphères et espaces projectifs de dimension impaire. □