4 Variétés

Exercice 4.1 (*Quadriques).*

Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$.

1) Montrer que c'est une sous-variété difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.

2) Représenter les différents cas pour $n + p = 3$.

Corrigé 4.1. On montre tout d'abord que 1 est une valeur régulière de $\|x\|^2 - \|y\|^2$ et on conclut que la quadrique Q est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+p}$. Les applications f et g de $\mathbb{R}^{n+p}$ dans lui même définies par

$$f(x,y) = \Big(\frac{x}{\sqrt{1+\|y\|^2}}, y\Big), \qquad g(x,y) = \big(x\sqrt{1+\|y\|^2}, y\big)$$

sont inverses l'une de l'autre. De plus, l'image de la quadrique par f est $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$. Comme la quadrique et $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n+p}$ et que f est clairement C^∞, la restriction h de f à Q est une application C^∞ de Q dans $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$. En raisonnant de même avec g, on montre que l'inverse de h est aussi C^∞. Donc h est un difféomorphisme.

Exercice 4.2 (*Hypersurface algébrique).*

1) Soit P un polynome homogène de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $d_x P \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que

$$H = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] / P(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que pour $P = x_0^2 + \ldots + x_i^2 - (y_0^2 + \ldots + y_j^2)$ avec i et j strictement positifs on obtient une sous-variété difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j$ par l'action de $\mathbb{Z}_2$, où l'élément non trivial agit par l'antipodie sur chaque facteur.

Corrigé 4.2. 1) Observons tout d'abord que P étant homogène, pour tout réel t,

$$P(x_0, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow P(tx_0, \ldots, tx_n) = 0$$

Ceci montre que H est bien définie. Par contre le polynôme P ne se factorise pas en une fonction sur le projectif, on ne peut donc pas lui appliquer le théorème sur les fibres des submersions. Pour contourner ce problème, travaillons dans les cartes.

Soit $U_i = \big\{[x_0 : \ldots : x_n] /\ x_i \neq 0\big\} \subset \mathbb{P}^n$. Comme les U_i forment un recouvrement ouvert de l'espace projectif, il suffit de montrer que $U_i \cap H$ est une sous variété de U_i. Quitte à permuter les coordonnées, il suffit de le

montrer pour $i = 0$. U_0 est l'ensemble de définition de l'application de carte φ_0 d'inverse

$$\mathbb{R}^n \to U_0, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \to [1 : x_1 : \ldots : x_n]$$

Comme φ_0 est un difféomorphisme, nous devons montrer que

$$\{(x_1, \ldots, x_n)/\ P(1, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

est une sous variété de $\mathbb{R}^n$. Soit la fonction de $\mathbb{R}^n$ donnée par $f(x) = P(1, x)$. Montrons que la différentielle de f est non nulle lorsque f s'annule. $d_x f = 0$ implique

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}(1, x) = \ldots = \frac{\partial P}{\partial x_n}(1, x) = 0$$

$f(x) = 0$ implique par homogénéité de P que $P(t, tx) = 0$ pour tout réel t. En dérivant par rapport à t en $t = 1$, cela donne

$$\frac{\partial P}{\partial x_0}(1, x) + x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1}(1, x) + \ldots + x_n \frac{\partial P}{\partial x_n}(1, x) = 0$$

les équations précédentes impliquent que la différentielle de P est nulle en $(1, x)$, ce qui est impossible par hypothèse.

2) D'après le 1), la quadrique projective

$$Q := \{[x_0 : \ldots : x_i : y_0 : \ldots : y_j]/\ \|x\|^2 = \|y\|^2\}$$

est une sous-variété de l'espace projectif de dimension $i + j + 1$. On vérifie facilement que Q est l'image de f

$$\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j \to \mathbb{P}^{i+j+1}, \quad (x, y) \to [x : y]$$

de plus

$$f(x, y) = f(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = \pm(x', y')$$

Donc f induit une bijection g de $(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j)/\{\pm \mathrm{id}\}$ sur H. L'action de $\{\pm \mathrm{id}\}$ étant libre, le quotient à une structure de variété. En utilisant la propriété universelle des sous-variété et celle des quotients, on établit que f puis g sont de classe C^∞ (écrire les détails). On montre ensuite que f puis g sont immersives (donner les détails à nouveau). Comme la quadrique et $(\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j)/\{\pm \mathrm{id}\}$ ont même dimension, par le théorème d'inversion local, g est un difféomorphisme local. g étant bijectif, c'est un difféomorphisme.

Exercice 4.3 (*Action libre et propre d'un groupe discret)***.**

Soit G un groupe discret qui agit librement par homéomorphismes sur un espace métrique X. Montrer que l'action est propre ssi pour toutes suites (x_n) de X et (g_n) de G, (x_n) et $(g_n x_n)$ convergent implique que (g_n) est stationnaire.

Corrigé 4.3. L'action est propre si par définition l'application de $G \times X$ dans X^2 qui envoie (g, x) sur $(g.x, x)$ est propre. Comme X est supposé métrisable et que G l'est comme espace discret, l'action est propre ssi pour toute suites (x_n) et (g_n) telles que (x_n) et $(g_n.x_n)$ convergent, (x_n, g_n) admet une valeur d'adhérence. Montrons que lorsque l'action est libre et propre, la convergence de (x_n) et $(g_n.x_n)$ implique que (g_n) converge. Il suffit pour cela de montrer que (g_n) admet une unique valeur d'adhérence. C'est bien le cas car toute valeur d'adhérence g de (g_n) vérifie $g.x = y$ où y est la limite de $(g_n.x_n)$ et x la limite de (x_n).

Exercice 4.4 (*Tore de révolution)***.**

Donner un difféomorphisme entre le tore $\mathbb{T}^2$ défini comme le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et le tore de révolution défini comme la sous-variété de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

Corrigé 4.4.

Le tore de révolution est l'image de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ qui envoie (α, β) sur $M(\alpha)U(\beta)$ où

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(\beta) = \begin{pmatrix} 2 + \cos\beta \\ 0 \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

Pour s'en convaincre, aucun calcul n'est nécessaire. Observons plutôt que Oz est axe de révolution. L'intersection du tore avec le demi-plan $\{(x, 0, z) / \ x \geqslant 0\}$ est le cercle C de rayon unité centré en $(2, 0, 0)$. Ce cercle est l'image de l'application $\alpha \to U(\alpha)$. Enfin on obtient le tore on prenant la réunion des $M(\alpha).C$, car $M(\alpha)$ est la rotation d'axe Oz d'angle α.

Vérifions que cette application est une immersion. Il suffit de montrer que

$$T_{(\alpha,\beta)} f(1, 0) = M'(\alpha)U(\beta) \quad \text{et} \quad T_{(\alpha.\beta)} f(0, 1) = M(\alpha)U'(\beta)$$

sont linéairement indépendants. Il est équivalent de montrer que $M(-\alpha)M'(\alpha)U(\beta)$ et $M(-\alpha)M(\alpha)U'(\beta) = U'(\beta)$ sont linéairement indépendants. Un simple

calcul montre que

$$M(-\alpha)M'(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U'(\beta) = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix}$$

et l'on conclut facilement.

L'application $(x, y) \to f(2\pi x, 2\pi y)$ se factorise en $g \circ p$ où p est la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{T}^2$ et g est une application de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Clairement g est injective. Comme $\mathbb{T}^2$ est compact g est un homéomorphime sur son image. L'application p étant un difféomorphisme local, f de classe C^∞ et immersive entraine que g est C^∞ et immersive. Enfin, étant injective, immersive et un homéomorphisme sur son image, g est un plongement.

Exercice 4.5 (*Ruban de Moebius)*.

Définir une structure de variété sur le quotient de $B = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ par le groupe engendré par la transformation qui envoie (x, s) sur $(x + 1, -s)$. Donner un plongement de cette variété dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé 4.5 (*Ruban de Moebius)*.

Considérons l'application f de $B = \mathbb{R}\times]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y) = \mathbf{u}(x) + \frac{y}{2}\big(\cos(\pi x)\mathbf{u}(x) + \sin(\pi x)\mathbf{k}\big)$$

où $\mathbf{u}(x) = \cos(2\pi x)\mathbf{i} + \sin(2\pi x)\mathbf{j}$ et $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $f(x + 1, -y) = f(x, y)$ cette application se factorise en $f = g \circ p$ où p est la projection de B sur le ruban de Moebius M et g est une application de M dans $\mathbb{R}^3$.

Montrons que g est injective. Soit q l'application de $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe $\mathbb{R}\mathbf{k}$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$q(a, b, c) = (a^2 + b^2)^{-1/2}(a, b)$$

On a $q\circ f(x, y) = \mathbf{u}(x)$. Donc $f(x, y) = f(x', y')$ implique que $x = x'+n$ avec n entier. De $f(x, y) = f(x + n, y')$ on tire que $y = (-1)^n y'$, par conséquent (x, y) et (x', y') appartiennent à la même orbite. On a montré que g est injective.

L'action de $\mathbb{Z}$ sur B donnée par $n.(x, y) = (x + n, (-1)^n y)$ est libre et propre. Ceci munuit le ruban de Moebius d'une structure de variété telle que la projection p est un difféomorphisme local. $f = g \circ p$ avec f de classe C^∞ entraine que g est de classe C^∞. De plus pour montrer que g est une

immersion, il suffit de montrer que f est immersive. Nous devons montrer que les deux vecteurs

$$T_{(x,y)}f(1,0) = \mathbf{u}'(x)(1+\frac{y}{2}\cos(\pi x)) + a(x,y)\mathbf{u}(x) + b(x,y)\mathbf{k}$$

et

$$T_{(x,y)}f(0,1) = \frac{1}{2}\big(\cos(\pi x)\mathbf{u}(x) + \sin(\pi x)\mathbf{k}\big)$$

sont linéairement indépendants. C'est le cas car $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{u}'(x)$ et $\mathbf{k}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Il reste à montrer que g est un homéomorphisme sur son image pour conclure que c'est un plongement. Montrons que l'inverse de g est une application continue $g(M) \to M$. Soit

$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)/\ x \geqslant 0\}, \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)/\ x \leqslant 0\}$$

$(U \cap g(M), V \cap g(M))$ étant un recouvrement ouvert de $g(M)$ il suffit de montrer que la restriction de l'inverse à $g(M) \cap U$ et $g(M) \cap V$ est continue. L'application de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité qui envoie x sur $\mathbf{u}(x)$ est un homéomorphisme local. Soit τ son inverse local à droite de $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ dans $]0,1[$. On vérifie facilement que l'application

$$U \to \mathbb{R}^2, \quad (a,b,c) \to \Big(\tau(q(a,b,c)), c\Big(\frac{\sin(\tau(q(a,b,c)))}{2}\Big)^{-1}\Big)$$

se restreint à $g(M) \cap U$ en l'inverse de g. Enfin comme τ est continue, cette application est continue et sa restriction aussi. On raisonne de même pour $g(M) \cap V$ avec un inverse de $x \to \mathbf{u}(x)$ sur $\mathbb{S}^1 \setminus \{(0,-1)\}$.

Exercice 4.6 (*Plan projectif*)**.**

Les applications de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

$$[x:y:z] \to \frac{(yz,zx,xy)}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(paramétrage de la surface romaine)}$$

$$[x:y:z] \to \frac{(yz,zx,\frac{1}{2}(x^2-y^2))}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(paramétrage du bonnet croisé)}$$

sont-elles des immersions, des plongements ?

Corrigé 4.6. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même donnée par

$$f(x,y,z) = (yz,zx,xy).$$

En calculant la matrice jacobienne de f, on constate que $T_{(x,y,z)}f$ est inversible si $xyz \neq 0$. Si $x = 0$ et $y^2 + z^2 = 1$, l'application $T_{(x,y,z)}f$ est de rang 2, son noyau est engendré par le vecteur $(0, -y, z)$.

La sphère étant une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, la restriction g de f à la sphère est de classe C^∞. De plus pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, $T_{(x,y,z)}g$ est la restriction de $T_{(x,y,z)}f$ à l'espace tangent $T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2$. Donc si $xyz \neq 0$, $T_{(x,y,z)}g$ est injective car restriction d'une application linéaire injective à un sous-espace. Si $x = 0$, le noyau de $T_{(x,y,z)}g$ est l'intersection de $T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2 \cap \mathrm{Vect}(((0, -y, z))$. Or l'espace tangent à la sphère en (x, y, z) étant le plan orthogonal à (x, y, z), on obtient que

$$\dim \ker T_{(x,y,z)}g = \begin{cases} 1 \text{ si } y^2 = z^2 = 1/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc l'application linéaire tangente à g n'est pas injective en 4 points du cercle $x = 0$, $y^2+z^2 = 1$. Les coordonnéees x, y et z jouant en rôle symétrique dans la définition de g, la discussion est similaire lorsque y ou z s'annule. En conclusion, l'application linéaire tangente à g en (x, y, z) est inversible hormis en 12 points de la sphère où elle est de rang 1.

Comme $g(x, y, z) = g(-x, -y, z)$, l'application g se factorise en $h \circ p$ où p est la projection de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{P}^2$ et h une application de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. h n'est autre que l'application de l'énoncé. D'après les propriétés des quotients établis dans les exercices précédents, l'application g étant C^∞, h est C^∞. De plus p étant un difféomorphisme local, les applications linéaires tangentes $T_{[x:y;z]}h$ et $T_{(x,y,z)}g$ ont même rang. On en déduit alors que $T_{[x:y;z]}h$ est inversible hormis en 6 points du plan projectif où elle est de rang 1.

Exactement par la même méthode, on montre que le paramétrage du bonnet croisé par le plan projectif est une immersion hormis en les points

$$[0 : 1 : 0],\ [1 : 0 : 0],\ [1 : 1 : \sqrt{2}],\ [1 : 1 : -\sqrt{2}],\ [1 : -1 : \sqrt{2}],\ [-1 : 1 : \sqrt{2}]$$

où l'application linéaire tangente est de rang 1.

Exercice 4.7 (*Bouteille de Klein)***.**

La bouteille de Klein est définie comme le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par le groupe des transformations engendré par

$$(x, y) \to (x + 1, y), \qquad (x, y) \to (-x, y + 1).$$

1) Munir la bouteille de Klein d'une structure de variété.

2) Représenter une immersion de la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^3$.

3) Donner un plongement dans $\mathbb{R}^4$.

4) Donner un difféomorphisme local du tore dans la bouteille de Klein tel que chaque point de l'image ait exactement deux antécédents.

Corrigé 4.7. a) La bouteille de Klein est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}^2$ donnée par

$$(n,k).(x,y) = ((-1)^k x + n, y + k)$$

Attention, la loi produit de $\mathbb{Z}^2$ est ici

$$(n,k).(n',k') = (n + (-1)^k n', k + k').$$

On munit $\mathbb{Z}^2$ de la topologie discrète et on vérifie que cette action est libre et propre. Le quotient hérite donc d'une structure de variété caractérisée par le fait que la projection canonique de $\mathbb{R}^2$ sur le quotient est un difféomorphisme local.

b) On se représente $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe Oz comme la réunion disjointe des $R(t)P$ où

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \{(x,0,z)/x > 0\}$$

ensuite on place une lemmiscate dans le plan Oxz que l'on fait tourner sur son point double d'un angle πt

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & 0 & -\sin(\pi t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\pi t) & 0 & \cos(\pi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) \\ 0 \\ \sin(4\pi s) \end{pmatrix}$$

Enfin on translate la lemmiscate du vecteur V de coordonnées $(2,0,0)$ pour qu'elle soit dans P et on applique la rotation $R(t)$ ce qui donne l'application

$$f(t,s) = R(t).(V + U(t,s))$$

On vérifie alors que f se factorise en une immersion g de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour le caractère immersif, il suffit de montrer que f est une immersion ce qui se fait avec les mêmes idées que pour le tore de révolution ou le ruban de Moebius.

c) On considére $\mathbb{R}^4$ privé du plan $\{0_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{R}^2$ comme la réunion des $R(t)E$ où

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \{(x,0,u,v)/x > 0\}$$

On fait tourner un cercle de l'angle πt sur un de ses axes dans l'espace $Oxuv$

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & 0 & -\sin(\pi t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\pi t) & 0 & \cos(\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) \end{pmatrix}$$

On translate le cercle obtenu du vecteur $V = (2,0,0,0)$ pour qu'il soit dans E et on applique la rotation $R(t)$ ce qui définit l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$

$$f(t,s) = R(t).(V + U(t,s))$$

On montre ensuite qu'elle se factorise en un plongement de la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4.8 (*Un quotient non-séparé)***.**

On considére l'action de $\mathbb{Z}$ sur le plan privé de l'origine donnée par

$$(x,y) \to (2^n x, 2^{-n} y), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

1) Montrer que le quotient n'est pas séparé

2) Décrire le quotient de chaque quart de plan ouvert et de chaque demi-axe. Expliquer comment se recollent ces différentes parties.

Exercice 4.9 (*Variété non-orientable)***.**

a) Montrer qu'une variété n'est pas orientable si elle admet deux cartes (U,φ) et (V,ψ) telles que U et V soient connexes et $\det((T_x\varphi) \circ (T_x\psi)^{-1})$ prenne à la fois des valeurs positives et négatives lorsque x décrit $U \cap V$.

b) Montrer que le ruban de Moebius et la bouteille de Klein ne sont pas orientables.

c) Montrer que les espaces projectifs de dimension paire ne sont pas orientables.

Corrigé 4.8. *a)* Si $C = (U,\varphi)$ et $D = (V,\Psi)$ sont deux cartes d'une variété M, pour tout x dans $U \cap V$ on note $s(C,D)(x)$ le signe de $\det(T_x(\Psi \circ \varphi^{-1}))$. Observons que

$$s(C,D)(x) = s(D,C)(x)$$

et pour un troisième carte $E = (W,\zeta)$,

$$s(C,D)(x).s(D,E)(x) = s(C,E)(x), \qquad \forall x \in U \cap V \cap W.$$

Supposons que M est orientable. Soit $\mathcal{A}$ un atlas fournissant une orientation. Soit une carte $C = (U,\varphi)$ de M pas nécessairement dans $\mathcal{A}$ telle que U soit

connexe. Alors il existe un signe $s(C)$ tel que pour tout x dans U et pour toute carte D de $\mathcal{A}$ contenant x dans son domaine, $s(C,D)(x) = s(C)$. En effet si D_1 et D_2 sont deux cartes de $\mathcal{A}$,

$$s(C,D_1)(x) = s(C,D_1)(x)s(D_1,D_2)(x)$$

et $s(D_1,D_2)(x) = +$. Donc le signe de $s(C,D)(x)$ ne dépend que de x. Comme il est localement constant et que U est connexe, il est constant.

Considérons maintenant deux cartes à domaines connexes $C = (U,\varphi)$ et $C' = (U',\varphi')$, alors on a

$$s(C,C')(x) = s(C).s(C')$$

pour tout x dans $U \cap U'$. En effet il suffit d'introduire une carte D de $\mathcal{A}$ contenant x et d'écrire que $s(C,C')(x) = s(C,D)(x).s(D,C')(x)$. L'équation précédente montre $s(C,C')(x)$ ne dépend pas de x. Donc la condition donnée dans l'énoncé contredit l'existence d'un atlas qui fournit une orientation.

b) On présente le ruban de Moebius comme le quotient de $B = \mathbb{R}\times]-1,1[$ par l'action de $\mathbb{Z}$ donnée dans l'exercice 4.5. Soit p la projection de B sur le quotient qui est un difféomorphisme local. Soit $U =]0,1[\times]-1,1[$ et $V =]1/2,3/2[\times]-1,1[$. Alors les restrictions p_U et p_V de p à U et V respectivement sont injectives donc des difféomorphismes sur leurs images $p(U)$ et $p(V)$. Par conséquent $(p(U),p_U^{-1})$ et $p(V),p_V^{-1})$ sont deux cartes du ruban de Moebius. L'application de changement de carte est

$$p_V^{-1}\circ p_U(x,y) = \begin{cases} (x+1,-y) \text{ si } x \in]0,1/2[\\ (x,y) \text{ si } x \in]1/2,1[\end{cases}$$

Le déterminant de sa différentielle vaut -1 ou 1 selon que x soit inférieur ou supérieur à $1/2$. D'après la question précédente le ruban Moebius n'est pas orientable. On raisonne de même pour la bouteille de Klein.

c) On travaille avec les cartes usuelles du projectif. Leurs domaines sont connexes. L'application de changement de carte entre la première et la deuxième carte est

$$(x_1,\ldots,x_n) \to \left(\frac{1}{x_1},\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right)$$

Le déterminant de son application linéaire tangente est $-1/x_1^{n+1}$. Donc si n est pair, il prend des valeurs positives et des valeurs négatives.

Exercice 4.10 (*Quotient et orientabilité).*

a) Soit M une variété orienté. On dit qu'un difféomorphisme f de M dans M préserve l'orientation si pour toute carte (U, φ) et (V, Ψ) de l'atlas fournissant une orientation, l'on a

$$\det(T_{\varphi(x)}(\Psi \circ f \circ \varphi)) > 0, \qquad \forall x \in U \cap f^{-1}(V).$$

On suppose qu'un groupe discret agit librement et proprement sur M par des difféomorphismes préservant l'orientation. Montrons que le quotient est naturellement orienté.

b) Montrer que les espaces projectifs de dimension impaire sont orientables.

Corrigé 4.9. *a)* Les applications de changement de cartes de l'atlas du quotient sont localement de la forme $\Psi \circ f \circ \varphi$ où Ψ et φ sont deux applications de carte de M et f l'action d'un élément du groupe. Par hypothèse, ces applications ont toutes un jacobien positif.

b) Il suffit d'appliquer ce qui précède en présentant l'espace projectif comme le quotient de la sphère. Lorsque la dimension est impaire, l'application d'antipodie préserve l'orientation. Ceci peut se vérifier sans aucun calcul : si φ_s et φ_n sont les projections stéréographiques par rapport aux pôles sud et nord, et ρ l'application d'antipodie, alors en utilisant la symétrie par rapport à l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_n(\rho(\varphi_s^{-1}(x))) = -x$.