Exercices corrigés

Laurent Charles

5 Fibrés et champs de vecteurs

Exercice 5.1 (*Différentielles)*.

1) Rappeler pourquoi la différentielle d'une fonction est une section du fibré cotangent.

2) Soient une application $\varphi : M \to \mathbb{R}^\ell$, un ouvert U de $\mathbb{R}^\ell$ qui contient l'image de φ et $g \in C^\infty(U)$. Montrer que

$$d(g \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{\ell} (\partial_i g \circ \varphi) d\varphi^i$$

où $\varphi^1, \ldots, \varphi^\ell$ sont les fonctions coordonnées de φ et $\partial_1 g, \ldots, \partial_\ell g$ sont les dérivées partielles de g. En application, calculer la différentielle de la fonction

$$f(x) = \cos(\varphi^1(x)\varphi^2(x)) + \varphi^1(x)\varphi^3(x)$$

où $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 \in C^\infty(M)$.

Corrigé 5.1 (*Différentielles)*.

2) La différentielle en $a \in M$ étant l'application linéaire tangente en a, l'on a par la règle de composition que

$$d_a(g \circ \varphi) = d_{\varphi(a)} g \circ T_a \varphi.$$

Les φ^i sont les fonctions coordonnées de φ donc

$$(T_a\varphi(X)) = (T_a\varphi^1(X), \ldots, T_a\varphi^n(X)) = (d_a\varphi^1(X), \ldots, d_a\varphi^n(X))$$

Enfin

$$d_{\varphi(a)} g(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = (\partial_1 g)(\varphi(a))\dot{x}_1 + \ldots + (\partial_n g)(\varphi(a))\dot{x}_n.$$

D'où

$$d_a(g \circ \varphi)(X) = (\partial_1 g)(\varphi(a)) d_a\varphi^1(X) + \ldots + (\partial_n g)(\varphi(a)) d_a\varphi^n(X).$$

Exercice 5.2 (*Changement de coordonnées dans le plan).*

1) Rappeler comment on associe à un système de coordonnées $(U, x^1, \ldots, x^n)$ d'une variété M un repère $(dx^1, \ldots, dx^n)$ du cotangent de M au dessus de U et un repère $(\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n})$ du tangent de M au dessus de U.

2) On note x et y les coordonnées linéaires de $\mathbb{R}^2$ et $x' = x + y$, $y' = y$. Calculer dx' et dy' en fonction de dx et dy, puis $\partial_{x'}$ et $\partial_{y'}$ en fonction de ∂_x et ∂_y. Qu'observez-vous ?

3) Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)/x \leqslant 0\}$ et $r, \theta \in C^\infty(U)$ les coordonnées polaires sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$. Calculer les champs de vecteurs

$$x\partial_x + y\partial_y \quad \text{(Euler)}, \qquad x\partial_y - y\partial_x \quad \text{(oscilateur harmonique)}$$

en fonction de ∂_r et ∂_θ.

Corrigé 5.2 (*Changement de coordonnées dans le plan).*

1) Les différentielles $(dx^1, \ldots, dx^n)$ forment en chaque point p une base de T_pM^*. Les champs de vecteurs ∂_{x^i} sont définies de sorte que en tout point p l'on ait

$$\langle d_p x^i, \partial_{x^j}|_p \rangle = \delta_{ij}.$$

2) On vérifie que x' et y' forment un système de coordonnées. Tout champ X du plan est alors combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial x'}$ et $\frac{\partial}{\partial y'}$ à coefficient des fonctions C^∞. Pour calculer ces fonctions on utilise la dualité entre (dx', dy') et $(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'})$ de sorte que

$$X = dx'(X)\frac{\partial}{\partial x'} + dy'(X)\frac{\partial}{\partial y'}$$

Comme $dx' = dx + dy$ et $dy' = dy$, on obtient avec $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $X = \frac{\partial}{\partial y}$ que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}$$

On remarque que $y = y'$ n'entraine pas $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$.

3) On applique la même méthode que précédemment. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ entrainent que

$$dx = \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta, \qquad dy = \sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$

D'où l'on tire que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Remarquez que l'on peut aussi faire ces calculs en partant de $r^2 = x^2 + y^2$ et $\tan(\theta) = y/x$, la deuxième égalité étant valable là où x ne s'annule pas. En différentiant, on obtient que

$$2rdr = 2xdx + 2ydy$$

et

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)}d\theta = \frac{1}{y}dx - \frac{y}{x^2}dx$$

donc

$$dr = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy, \qquad d\theta = \frac{xdy - ydx}{r^2}$$

Le résultat est valable sur tout U même si une partie des calcul ne valent que en dehors de l'axe Oy. En effet il suffit de prolonger par continuité pour obtenir les égalités là où x s'annule.

On retrouve les formules précédentes exprimant $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ dans le repère $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta})$ en utilisant que

$$X = dr(X)\frac{\partial}{\partial r} + d\theta(X)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

pour $X = \frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$.

Un simple calcul montre enfin que le champ d'Euler vaut en coordonnées polaires

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = r\frac{\partial}{\partial r}$$

et l'oscillateur harmonique

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Exercice 5.3 (*Champs de vecteur de $\mathbb{R}^n$*)**.**

On dit d'un champ $X = \sum_{i=1}^n f^i \partial_{x^i}$ de $\mathbb{R}^n$ qu'il est constant (resp. linéaire) si les f^i sont constantes (resp. linéaires).

a) Soient deux champs de $\mathbb{R}^n$ donnés par $X = \sum f_i \partial_{x^i}$ et $Y = \sum g_i \partial_{x^i}$. Montrer que le crochet vaut

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{L}_X g_i - \mathcal{L}_Y f_i) \partial_{x^i}$$

b) Montrer que l'ensemble des champs constants de $\mathbb{R}^n$ forment un sous-algèbre de Lie.

c) Montrer que l'ensemble $\mathfrak{gl}(n)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels est une algèbre de Lie, où le produit est donné par le commutateur. Montrer que les matrices antisymétriques forment une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{o}(n)$ de $\mathfrak{gl}(n)$.

d) Montrer que les champs de vecteurs linéaires de $\mathbb{R}^n$ forment une sous-algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{gl}(n)$.

e) Montrer que le produit vectoriel $\times$ munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure d'algèbre de Lie. Montrer que cet algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{o}(3)$. En déduire que pour tout vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$,

$$[L_v, L_u] = L_{v \times u}$$

où L_v est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $L_v(x) = (x, x \times v)$

Corrigé 5.3 (*Rotations infinitésimales)*.

b) D'après le *a)*, le crochet de deux champs constants est le champ nul, qui est bien un champ constant.

d) Pour toute matrice M, on note X_M le champ $X_M = \sum_{i,j=1}^{n} x^i M_i^j \partial_{x^j}$. Calculons le crochet de X_M et X_N. L'on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k,\ell=1}^{n} \mathcal{L}_{X_M}(x^k N_k^\ell) \partial_{x^\ell} &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} x^i M_i^j \mathcal{L}_{\partial_{x^j}}(x^k) N_k^\ell \partial_{x^\ell} \\
&= \sum_{i,j,\ell=1}^{n} x^i M_i^j N_j^\ell \partial_{x^\ell} \\
&= \sum_{i,\ell=1}^{n} x^i (MN)_i^\ell \partial_{x^\ell} \\
&= X_{MN}
\end{aligned}$$

Donc d'après la question *a)*,

$$[X_M, X_N] = X_{MN-NM}$$

ce qui montre que l'aplication de $\mathfrak{gl}(n)$ dans $\Gamma(\mathbb{R}^n, T\mathbb{R}^n)$ qui envoie M sur X_M est un morphisme d'algèbre de Lie. Cette application est de plus injective et son image est l'ensemble des champs linéaires.

e) Le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique. L'identité de Jacobi découle de la formule du double produit

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$

Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$, l'on note M_u la matrice

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Un simple calcul montre que $[M_u, M_v] = M_{u\times v}$. L'on en déduit que l'application qui envoie u sur M_u est un isomorphisme d'algèbre de Lie entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathfrak{o}(3)$. Pour montrer le dernier point, on remarque que $M_u v = u \times v$. L'on en déduit $X_{M_u} = L_u$.

Exercice 5.4 (*Champs de vecteurs sur la sphère)***.**

On considère la sphère comme la compactification du plan $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ où le plongement j est l'inverse d'une projection stéréographique. Montrer que tout champ de vecteurs constant du plan se prolonge à la sphère. Même question avec le champ d'Euler.

On rappelle que si (x_n, y_n) et (x_s, y_s) sont les coordonnées obtenues par projection stéréographique par rapport aux pôles nord et sud respectivement, on a au dessus de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$

$$x_n = \frac{x_s}{x_s^2 + y_s^2}, \qquad y_n = \frac{y_s}{x_s^2 + y_s^2}$$

Corrigé 5.4 (*Champs de vecteurs sur la sphère)***.**

Dans un espace vectoriel E, l'espace tangent en tout point s'identifie naturellement à E. Ainsi le fibré tangent de E est naturellement isomorphe au fibré trivial $E \times E$. On appelle champ constant de E une section X de $E \times E$ de la forme

$$X(x) = (x, u)$$

avec $u \in E$. La notion de champ constant d'une variété quelconque n'a pas de sens, car il n'y a pas d'identification naturelle entre les différents espaces tangents.

On note x et y les coordonnées linéaires de $\mathbb{R}^2$ et ∂_x, ∂_y les deux champs de vecteurs associés. Un champ de vecteurs constant de $\mathbb{R}^2$ est alors un

champ de la forme $a\partial_x + b\partial_y$ avec a et b deux réels. On identifie $\mathbb{R}^2$ à la sphère privée du pôle nord par projection stéréographique. Le champ constant $a\partial_x + b\partial_y$ devient alors le champ $X = a\partial_{x_n} + b\partial_{y_n}$. On se demande s'il est possible de définir X au pole nord de sorte que X soit lisse. Pour cela on exprime X sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ dans le repère ∂_{x_s}, ∂_{y_s}.

On a au dessus de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$

$$\begin{aligned} dx_n =& \Big(\frac{1}{x_s^2 + y_s^2}\Big)^2 \big((y_s^2 - x_s^2)dx_s - 2x_s y_s dy_s\big) \\ =& (y_n^2 - x_n^2)dx_s - 2x_n y_n dy_s \end{aligned}$$

et de même

$$dy_n = (x_n^2 - y_n^2)dy_s - 2x_n y_n dx_s$$

Par conséquent,

$$\partial_{x_s} = (y_n^2 - x_n^2)\partial_{x_n} - 2x_n y_n \partial_{y_n}, \qquad \partial_{y_s} = (x_n^2 - y_n^2)\partial_{y_n} - 2x_n y_n \partial_{x_n}$$

et donc

$$X = \big(a(y_n^2 - x_n^2) - 2bx_n y_n\big)\partial_{x_n} + \big(-2ax_n y_n + b(x_n^2 - y_n^2)\big)\partial_{y_n}$$

Du fait que les fonctions $a(y_n^2 - x_n^2) - 2bx_n y_n$ et $-2ax_n y_n + b(x_n^2 - y_n^2)$ sont de classe C^∞ sur la sphère privée du pôle sud et s'annulent au pôle nord, on prolongeant le champ par $X(N) = 0$, on obtient un champ de classe C^∞ sur la sphère.

De même le champ Y qui sur la sphère privée du pôle nord vaut $x_s\partial_{x_s} + y_s\partial y_s$ et s'annule au pôle nord est de classe C^∞. En effet un calcul similaire au précédent montre que l'on sur la sphère privée du pôle sud

$$Y = -x_n\partial_{x_n} - y_n\partial y_n.$$

Exercice 5.5 (*Fibré tangent du tore)***.**

Montrer qu'un fibré muni d'un atlas tel que toutes ses fonctions de transition soient constantes égales à l'identité, est trivial. En déduire que les tores sont parallélisables.

Corrigé 5.5. Soit un fibré $p : F \to B$. Supposons que B admette un recouvrement ouvert (U_i) tel que l'on ait pour chaque i une trivialisation $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times E$ et que pour tout i et j,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = \mathrm{Id} : (U_i \cap U_j) \times E \to (U_i \cap U_j) \times E$$

On définit alors une application $\varphi : F \to B \times E$ par

$$\varphi(\xi) := \varphi_i(\xi)$$

si $\xi \in p^{-1}(U_i)$. La définition de $\varphi(\xi)$ ne dépend pas du choix de i grace à l'hypothèse. Clairement, φ est une bijection qui se se restreint en un isomorphisme linéaire de F_x sur $\{x\} \times E$ pour tout $x \in B$. Enfin c'est un difféomorphisme car pour tout i sa restriction à $p^{-1}(U_i)$ coincide avec φ_i qui est un difféomorphisme sur son image par hypothèse.

Ceci s'applique au fibré tangent d'un tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. En effet, pour un fibré tangent TB, à chaque carte $c = (U, \varphi, \mathbb{R}^n)$ de B est associée une trivialisation de TB au dessus de U

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} \{x\} \times T_x B \to U \times \mathbb{R}^n, \quad (x, \xi) \to \xi_c$$

Etant donné deux cartes $c = (U, \varphi, \mathbb{R}^n)$ et $c' = (U', \varphi', \mathbb{R}^n)$ le changement de trivialisation est l'application de $(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$ dans lui même qui envoie (x, η) sur $(x, T_x(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\eta))$. Dans le cas du tore, la structure de variété nous vient par quotient et les applications de changements de cartes se restreignent au voisinage de chaque point en des translations. Leurs application linéaires tangentes sont donc les applications identité.

Exercice 5.6 (*Sphères de dimension impaire.)*.

a) Montrer que l'on a un isomorphisme de $C^\infty(\mathbb{S}^n)$-module entre l'espace des champs de vecteurs de la sphère $\mathbb{S}^n$ et

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1}) / \ \forall x \in \mathbb{S}^n, x \perp f(x)\}$$

b) Montrer qu'une sphère de dimension impaire admet un champ de vecteurs qui ne s'annule nulle-part.

c) Montrer que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

d) Montrer que les sphères dont la dimension est congrue à 3 modulo 4 admettent 3 champs de vecteurs qui forment une famille libre en tout point.

Exercice 5.7 (*Sous-fibrés)*.

Soit $p : E \to M$ un fibré vectoriel de rang n. Soit k un entier plus petit que n et F une partie de E telle que pour tout x de M, $E_x \cap F$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension k. L'on suppose de plus que tout point de M admet un voisinage U et k sections $s_1, \ldots, s_k \in \Gamma(U, E)$ telles que pour tout $x \in U$, $s_1(x), \ldots, s_k(x)$ forment une base de $F \cap E_x$. Montrer alors que F est un fibré de base M, la projection sur la base étant la restriction de p.

Corrigé 5.6 (*Sous-fibrés*)**.**

Montrons que F est une sous-variété de E et construisons des trivialisations locales. Pour tout $p \in M$, l'hypothèse nous fournit k sections définies sur un voisinage U de p. Quitte à restreindre U, on peut compléter cette famille par $n-k$ sections de sorte que pour tout x de U, $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ forment une base de E_x. Pour ce faire il suffit de compléter $s_1(p), \ldots, s_k(p)$ en une base de E_p, d'étendre ces nouveaux vecteurs en des sections et de restreindre U à l'ouvert où ces sections forment une famille libre. Alors l'application

$$p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i(x) \to (x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

est une trivialisation de E, elle envoie $p^{-1}(U) \cap F$ sur $U \times \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}$. Ceci montre que F est une sous-variété de E et fournit des trivialisations de F.

Exercice 5.8 (*Un fibré sur le cercle qui n'est pas trivial*)**.**

Soit p la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $D_{p(x)}$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ qui fait un angle de πx avec l'axe des abscisses. Considérons

$$\gamma := \{(\xi, u) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2 / \; u \in D_\xi\} = \bigcup_{\xi \in \mathbb{T}^1} \{\xi\} \times D_\xi$$

a) Montrer que γ est un sous-fibré de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$. Pour cela, considérer les deux sections locales

$$s_1 : p(]0,1[) \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2, \quad s_1(p(x)) = (p(x), \cos(\pi x), \sin(\pi x)) \text{ si } x \in]0,1[$$
$$s_2 : p(]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[) \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2, \quad s_2(p(x)) = (p(x), \cos(\pi x), \sin(\pi x)) \text{ si } x \in]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[$$

et constater que pout tout $\xi \in \mathbb{T}$, D_ξ est engendré par $s_1(\xi)$ ou $s_2(\xi)$. Vérifier ensuite que $s_1 = -s_2$ sur $p(]0, \frac{1}{2}[)$ et $s_1 = s_2$ sur $p(]\frac{1}{2}, 1[)$.

b) Montrer que γ privé de la section nulle est connexe. En déduire que γ n'est pas isomorphe au fibré trivial sur le cercle.

c) Montrons que γ est difféomorphe au ruban de Moebius M. On rappelle que M est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{Z}$, l'action étant $n.(x,y) = (x+n, (-1)^n y)$. Montrer alors que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \to (p(x), y\cos(\pi x), y \sin(\pi x))$$

se factorise en un plongement $j : M \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2$ d'image γ.

Corrigé 5.7.

a) p est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}$. Comme la restriction de p à $]0,1[$ (resp. $]1/2,3/2[$) est injective, elle admet un inverse C^∞ que l'on note $\varphi_1 : p(]0,1[) \to]0,1[$ (resp. $\varphi_2 : p(]1/2,3/2[) \to]1/2,3/2[$). Les sections s_1 et s_2 de l'énoncé sont lisses car données par

$$s_i(\xi) = (\xi, \cos(\pi\varphi_i(\xi)), \sin(\pi\varphi_i(\xi)))$$

D'après l'exercice précédent, γ est un sous-fibré de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2$

Si $\xi \in p(]0,1/2[)$, alors $\varphi_2(\xi) = \varphi_1(\xi) + 1$ et donc $s_2(\xi) = -s_1(\xi)$. Si $\xi \in p(]1/2,1[)$, alors $\varphi_2(\xi) = \varphi_1(\xi)$ et donc $s_2(\xi) = s_1(\xi)$.

b) L'application de $[0,2] \times \mathbb{R}_+^*$ dans γ

$$(x,y) \to (p(x), y\cos(\pi x), y\sin(\pi x))$$

admet pour image γ privée de la section nulle. Cette partie est donc connexe car image d'un connexe par une application continue.

Ceci montre que γ n'est pas trivialisable. En effet, si l'on avait un isomorphisme de fibré $\psi : \gamma \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, alors $\psi(\gamma \setminus 0_\gamma) = \mathbb{T} \times \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe.

Exercice 5.9 (*Fibré tautologique de l'espace projectif*)**.**

Montrer que

$$E = \{(x,u) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} / u \in x\}$$

est un sous-fibré du fibré trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. On l'appelle fibré tautologique. En donner des trivialisations sur les ouverts $O_k = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n / \ x_k \neq 0\}$ telles que les fonctions de transition soient

$$O_k \cap O_j \to \mathbb{R}^*, \quad [x_0 : \ldots : x_n] \to x_k/x_j.$$

Montrer que le fibré tautologique n'est pas isomorphe au fibré trivial.

Corrigé 5.8.

La fibre de E au dessus de x

$$E_x = (\{x\} \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E = \{x\} \times x$$

est un sous-expace vectoriel de $\{x\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ de dimension 1. Pour montrer que E est un fibré, il suffit d'après l'exercice sur les sous-fibrés de montrer l'existence d'un recouvrement ouvert (O_k) de $\mathbb{P}^n$ et d'une famille $(s_k : O_k \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$ de sections telles que pour tout point $x \in O_k$, $s_k(x)$ engendre E_x.

Les ouverts O_k donnés dans l'énoncé et les sections s_k définies par

$$s_k([x_0 : \ldots : x_n]) = \big([x_0 : \ldots : x_n], \frac{1}{x_k}(x_0, \ldots, x_n)\big)$$

conviennent.

Chacune des sections s_k induit une trivialisation $O_k \times \mathbb{R} \to E|_{O_K}$ qui envoie (x, y) sur $ys_k(x)$. La fonction de transition entre les trivialisations sur O_k et O_ℓ respectivement est la fonction $f : O_j \cap O_k \to \mathbb{R}^*$ telle que $s_j(x) = f(x)s_k(x)$. On a immédiatement que $f(x) = x_k/x_j$.

Enfin les O_k sont connexes, ces fonctions de transitions prennent toutes des valeurs positives et négatives. On en déduit que le fibré tautologique n'est pas trivialisable. Si c'était le cas, il existerait une section globale s qui ne s'annulerait en aucun point. Donc sur chaque O_k, $s_k = g_k s$ avec g_k une fonction ne s'annulant pas. Par connexité de O_k, g_k a un signe constant et donc les fonctions de transitions g_k/g_ℓ aussi, une contradiction.