Exercices corrigés

Laurent Charles

6 Flots

Exercice 6.1 (*Exemples de flots non-globaux).* Considérons les champs de vecteurs de $\mathbb{R}$

$$X_n = ax^n \partial_x, \qquad n = 0, 1, 2, 3,$$

où a est un paramètre réel non-nul.

a) Pour chaque valeur de n, calculer les courbes intégrales de X_n et les représenter. Donner l'intervalle de vie de tout $x \in \mathbb{R}$. Expliciter l'ensemble de définition du flot au temps t. Décrire le portrait des phases, c'est-à-dire la partition de $\mathbb{R}$ en les trajectoires (cf. exercice suivant).

b) Montrer que pour $n = 0, 1, 2$, le champ X_n se prolonge à la droite projective en un champ Y_n et reprendre la question précédente avec Y_n.

Corrigé 6.1 (*Exemples de flots non-globaux).*

a) Pour $n = 0$, l'intervalle de vie de x est $I_x = \mathbb{R}$, la courbe intégrale $(I_x, x(t) = x + at)$, l'ensemble de définition du flot au temps t est $\Omega_t = \mathbb{R}$, avec $\varphi^t(x) = x + at$. Il y a une seule trajectoire.

Pour $n = 1$, $I_x = \mathbb{R}$, $x(t) = xe^{at}$, $\Omega_t = \mathbb{R}$, $\varphi^t(x) = xe^{at}$. Il y a trois trajectoires $\mathbb{R}^-$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}^+$.

Pour $n = 2$ et 3 on intègre l'équation $x' = ax^n$ comme suit

$$adt = \frac{dx}{x^n} = \frac{d(x^{1-n})}{1-n} \Rightarrow at = \frac{x(t)^{1-n} - x^{1-n}(0)}{1-n}$$

Ce calcul formel pourra être justifié plus tard avec les formes différentielles. A ce stade, on constate juste en dérivant que l'on a bien des solutions de l'équation différentielle.

Pour $n = 2$, $I_x =]-\infty, \frac{1}{xa}[$, $\mathbb{R}$, $]\frac{1}{xa}, +\infty[$ selon que xa soit > 0, nul ou < 0. Ce sont bien des solutions maximales car la courbe n'admet pas de limite finie lorsque le temps tend vers une borne finie de l'intervalle de définition, on ne peut donc pas les prolonger. Le flot est

$$\varphi^t(x) = \frac{x}{1 - atx}$$

Enfin, $\Omega_t =]-\infty, \frac{1}{at}[$, $\mathbb{R}$, $]\frac{1}{at}, +\infty[$ selon que at soit > 0, nul ou < 0. Il y a trois trajectoires $\mathbb{R}^+$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}^-$.

Pour $n = 3$ et $a > 0$, $I_x =]-\infty, \frac{1}{2ax^2}[$ si $x \neq 0$ et $I_0 = \mathbb{R}$. Le flot

$$\varphi^t(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2at}}$$

Ensuite $\Omega_t = \mathbb{R}$ si $t \leqslant 0$ et $]-\frac{1}{\sqrt{2at}}, \frac{1}{\sqrt{2at}}[$ si $t > 0$. Il y a trois trajectoires $\mathbb{R}^+$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}^-$.

b) On rappelle que la droite projective a deux coordonnéees $x : \mathbb{P}^1 \setminus \{[1 : 0]\} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\} \to \mathbb{R}$. Sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1], [1 : 0]\}$, l'on a $y = 1/x$, d'où $\partial_x = -x^{-2}\partial_y$ et donc

$$ax^n\partial_x = -ax^{n-2}\partial_y = -ay^{2-n}\partial_y$$

Donc le champ se prolonge si $n = 0, 1, 2$. La droite projective étant compacte $\Omega_t = \mathbb{P}^1$ et $I_x = \mathbb{R}$ quel que soit x et t et on déduit des formules précédentes que pour $n = 0$

$$\varphi^t([1 : x]) = [1 : x + at] \quad \text{et} \quad \varphi^t([0 : 1]) = [0 : 1]$$

et pour $n = 1$

$$\varphi^t([1 : x]) = [1 : xe^{at}] \quad \text{et} \quad \varphi^t([0 : 1]) = [0 : 1]$$

Le cas $n = 2$ se ramène à $n = 0$ en échangeant les coordonnées. Lorsque $n = 0$ il y a deux trajectoires (un point fixe) et lorsque $n = 1$ il y a quatre trajectoires (deux points fixes). Il est intéressant de tracer les portraits de phases sur $\mathbb{P}^1$ et les courbes intégrales sur le cylindre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R} \ni (x, t)$ lorsque $a = 1$ et $n = 0$ ou 1

Exercice 6.2 (*Portrait de phases)*. Soit un champ de vecteur X d'une variété M. On appelle orbite de $x \in M$ ou trajectoire passant par x l'ensemble

$$\{u_x(t)/\ t \in I_x\}$$

où (I_x, u_x) est l'arc intégral de X d'origine x. Montrer les faits suivants :

a) deux trajectoires sont ou bien disjointes ou bien confondues ;

b) chaque trajectoire est ou bien un point, un cercle plongé, ou une droite réelle immergée ; plus précisément, si (I, u) est un arc intégral maximal, alors ou bien u est constante et $I = \mathbb{R}$, ou bien u est une immersion injective ou bien $I = \mathbb{R}$ et il existe $T \neq 0$ tel que u se factorise en un plongement $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to M$.

c) si $(]a,\infty[,u)$ est une courbe intégrale telle que $u(t) \to u_\infty$ quand $t \to \infty$, alors u_∞ est un zéro de X.

d) Décrire les portraits de phase possibles lorsque M est la droite réelle ou bien le cercle.

Corrigé 6.2 (*Portraits de phase)*.

a) Soit (I,u) un arc intégral maximal. Alors pour tout arc intégral (J,v) tel que $v(t_0) = u(t_0)$ pour un certain $t_0 \in I \cap J$, l'on a que $J \subset I$ et $v = u$ sur J, autrement dit (I,u) prolonge (J,v). En effet, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'on a que $u = v$ sur $I \cap J$. Donc $(I \cup J, w)$, où $w(t) = u(t)$ si $t \in I$, $v(t)$ si $t \in J$ est une courbe intégrale. Cette courbe intégrale prolonge (I,u) qui est maximale, donc $I = I \cup J$.

Montrons que si deux trajectoires s'intersectent en un point, elles sont confondues. Soient x et y tels qu'il existe $t \in I_x$ et $s \in I_y$ vérifiant $u_x(t) = u_y(s)$. Alors $(-s+t+I_y, u_y(\cdot + s - t))$ est un arc intégral et $u_y(t+s-t) = u_x(t)$. Donc (I_x, u_x) prolonge $(-s+t+I_y, u_y(\cdot+s-t))$ et par conséquent $u_y(I_y) \subset u_x(I_x)$. L'inclusion contraire se démontre de la même façon.

b) Les trajectoires réduites à des points sont les zéros du champ. D'après le *a)*, si une trajectoire n'est pas réduite à un point, le champ ne s'annule en aucun point de la trajectoire et elle est donc l'image d'un arc intégral maximal (I,u) où u est immersive. Ou bien u est injective et dans ce cas la trajectoire est une droite immergée ou bien il existe $t_0 \in I$ et $T > 0$ tel que $t_0 + T \in I$ et $u(t_0) = u(t_0 + T)$. Ceci implique que $I = \mathbb{R}$ et que T est une période de u. En effet, $(-T + I, u(\cdot + T))$ est un arc intégral qui en t_0 prend la même valeur que u. (I,u) étant maximal, il prolonge $(-T+I, u(\cdot+T))$. Ceci montre que la borne inférieure de I est $-\infty$. En raisonnant de la même façon avec $u(s_0) = u(s_0 - T)$ pour $s_0 = t_0 + T$, l'on obtient que la borne supérieure de I est ∞.

L'ensemble des périodes de u est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. D'après un résultat bien connu, il est ou bien monogène ou bien dense. Le deuxième cas est impossible car cela impliquerait que u soit constante. Donc ce groupe est de la forme $P\mathbb{Z}$ avec $P > 0$.

u passe au quotient en une application $\tilde{u}$ de $\mathbb{R}/P\mathbb{Z}$ dans M. $\tilde{u}$ est injective car comme on l'a vu $u(t) = u(s)$ implique que $t - s$ est une période donc un multiple de P. u étant immersive, $\tilde{u}$ l'est aussi. Enfin le quotient $\mathbb{R}/P\mathbb{Z}$ étant compact, $\tilde{u}$ est un homéomorphisme sur son image. Donc $\tilde{u}$ est un plongement.

c) On note $\varphi(x,t) = u_x(t)$ le flot. On rappelle que son domaine de définition $\{(x,t)\ t \in I_x\}$ est un ouvert de $M \times \mathbb{R}$. Donc pour un certain voisinage ouvert U de u_∞ et un $\epsilon > 0$, le flot est défini sur $U \times]-\epsilon, \epsilon[$. Si t

est suffisamment grand $u(t) \in U$, l'on alors que pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$,

$$\varphi(u(t), s) = \varphi(u(t+s), 0)$$

D'après le cours φ est continue (même lisse), donc en faisant tendre dans l'égalité précédente t vers l'infini, il vient que $\varphi(u_\infty, s) = \varphi(u_\infty, 0) = u_\infty$. En dérivant par rapport à s, on en déduit que le champ s'annule en u_∞.

d) Soit X un champ de $\mathbb{R}$ et J l'ouvert formé des points p tels que $X(p) \neq 0$. Rappelons que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion disjointe dénombrable d'intervalles ouverts (un ouvert O de $\mathbb{R}$ est localement connexe donc ses composantes connexes sont des intervalles ouverts, ensuite O est dénombrable à l'infini, une suite exhaustive de compacts étant par exemple $K_n = [-n, n] \cap \{x \in O/\ d(x, O^c) \geqslant 1/n\}$, par compacité, chaque K_n est recouvert par un nombre fini de composantes connexes de O, une réunion dénombrable d'ensemble finis étant dénombrable, les composantes connexes de O forment une famille dénombrable).

Chacune des composantes connexes de J est une trajectoire de X. En effet si $u :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une courbe intégrale maximale dont l'image n'est pas réduite à un point, alors la dérivée de u ne s'annule nulle-part, donc $u(t)$ admet des limites pour $t \to a$ ou b. Si ces limites sont finies elles sont point fixes d'après le *c)*. Donc l'image de u est une composante connexe de J.

Pour conclure les trajectoires de X sont les singletons formés des zéros de X et les composantes connexes de J. Réciproquement, on avait vu que tout fermé est ensemble de zéros d'une fonctions C^∞ donc d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}$.

Le résultat est le même pour le cercle. En effet si le flot a (au moins) un point fixe, on se ramène à $\mathbb{R}$ immédiatement en enlevant ce point fixe (les autres trajectoires restent les mêmes puisqu'elles ne rencontrent pas le point fixe). Si le flot n'a pas de point fixe, il n'y a qu'une trajectoire. En effet si on enlève un point, d'après l'étude sur $\mathbb{R}$, il n'y aura qu'une trajectoire. Et on conclut facilement en enlevant un autre point.

Exercice 6.3 (*Intégrale première)***.** Soit un champ de vecteurs X d'une variété M.

a) Montrer qu'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est constante le long des courbes intégrales de X si et seulement si $X.f$ est nulle. Une telle fonction s'appelle une *intégrale première* du champ.

b) Donner des exemples d'un telle situation avec les champs de vecteurs du plan de l'exercice **??**.

c) Montrer qu'un champ admettant une intégrale première propre est complet. Comme application, montrer que si la fonction $E(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$

est propre, alors toute solution de $\ddot{x} = -\nabla V(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Corrigé 6.3 (*Intégrale première*)**.**

a) On a pour toute courbe intégrale (I, u)

$$\frac{d}{dt}\big[f(u(t))\big] = \langle df_{u(t)}, u'(t)\rangle = \langle df_{u(t)}, X(u(t))\rangle = (X.f)(u(t)).$$

b) Le champs d'Euler admet pour intégrale première la fonction x/y, l'oscillateur harmonique la fonction $x^2 + y^2$.

c) Si f est une intégrale première, alors toute courbe intégrale est contenue dans un ensemble de niveau K de f. K est compact si f est propre. Or d'après le cours si (I, u) est une courbe intégrale maximale, I majoré (resp. minoré) implique que pour tout compact K et pour t suffisamment grand (resp. petit), $u(t) \notin K$. Donc nécessairement $I = \mathbb{R}$.

A propos des fonctions propres, remarquer qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est propre ssi pour tout R, $f^{-1}(B(0_{\mathbb{R}^p}, R))$ est bornée ssi $\|f(x)\|$ tend vers l'infini lorsque $\|x\| \to \infty$. De plus $\xi^2 + V(x)$ est propre ssi $V(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to \infty$.

Exercice 6.4 (*Champs et sous-variétés*)**.** Soit une variété M, un sous-variété N. Considérons un champ X de M tangent à M, c'est à dire que pour tout $x \in N$, $X(x) \in T_xN$.

a) Montrer que X définit par restriction un champ Y de N tel que pour toute courbe (I, u) de N, (I, u) est une courbe intégrale de X ssi c'est une courbe intégrale de Y.

b) Supposons que N soit fermée dans M. Soit (I, u) une courbe intégrale de Y telle qu'il existe $t_0 \in I$ pour lequel $u(t_0) \in N$. Montrer alors que $u(I) \subset N$.

Corrigé 6.4 (*Champs et sous-variétés*)**.**

a) On définit Y par $Y(x) = X(x)$ pour tout $x \in N$. Comme N et son espace tangent TN sont des sous-variétés de M et TM respectivement, Y est lisse. Il est immédiat que pour toute courbe (I, u) de N, (I, u) est une courbe intégrale de X ssi c'est une courbe intégrale de Y.

b) Soit $(]a, b[, u)$ une courbe intégrale de Y telle que $u(t_0) \in N$ pour un certain $t_0 \in]a, b[$. Considérons alors $\tau = \sup\{s \in [t_0, b[\ u([t_0, s]) \subset N\}$. Montrons que $\tau = b$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\tau \in [t_0, b[$ et M étant fermée, on déduirait de la continuité de u que $u(\tau) \in N$. Soit (J, v) un arc intégral de Y d'origine $u(\tau)$. Alors (J, v) est un arc intégral de X. Comme $(]a - \tau, b - \tau[, u(\cdot + \tau))$ est un arc intégral de X ayant même origine, ils coincident au voisinage de 0, cela montre que u prend ses valeurs dans N lorsque décrit un voisinage de τ, ce qui contredit la définition de τ.