Correction du contrôle du 26 octobre 2007

Exercice 1.

a) L'application j est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa matrice jacobienne étant de rang 2 en tout point, j est une immersion. j est injective. Elle induit donc une bijection $\mathbb{R}^2 \to V$. Son inverse est continue car elle coincide avec l'application $(x, y, z) \to (x/\cos z, z)$ (resp. $(x, y, z) \to (y/\sin z, z)$) au voisinage des (x_0, y_0, z_0) tel que $z_0 \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$) (resp. $z_0 \notin \pi\mathbb{Z}$). j étant une immersion qui induit un homéomorphisme sur son image, c'est un plongement.

b) j étant un plongement, son image V est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. De plus l'application linéaire tangente à j en (t, θ) induit un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $T_{j(t,\theta)}V$. Par conséquent la restriction de π à V est une submersion ssi $\pi \circ j$ est une submersion. Ce n'est pas le cas car la jacobienne de $\pi \circ j$ est de rang 1 en $(0, 0)$.

Exercice 2.

a) Si $(u, v, w) = f(x, y, z)$, un calcul direct montre que

$$u^2 + v^2 + w^2 = 4z^2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + 1 \tag{1}$$

Par conséquent f se restreint en une application g de la sphère dans elle-même. L'image de l'équateur

$$E := \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\} \tag{2}$$

est le pôle nord $(0, 0, 1)$. Pour montrer que g est surjective, il suffit alors de montrer que tout point (u, v, w) différent du pôle nord admet un antécédent par f dans $\mathbb{S}^2$. Comme $w < 1$, l'équation $1 - 2z^2 = w$ admet une solution $z \neq 0$. Les équations $2xz = u$ et $2yz = v$ admettent alors des solutions x et y. On déduit de (1) que $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$.

b) $\mathbb{S}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ l'espace tangent $T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2$ est un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. L'application linéaire tangente à f en $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ envoie $T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2$ dans $T_{g(x,y,z)}\mathbb{S}^2$. Elle induit par restriction l'application linéaire tangente à g en (x, y, z). Si $z \neq 0$, la jacobienne de f est inversible. Donc $T_{(x,y,z)}g$ est une surjection. Si $z = 0$, la jacobienne de f est de rang 1 et par conséquant $T_{(x,y,z)}g$ est de rang au plus 1. Donc les points critiques de g sont les points de l'équateur (2) et g admet une seule valeur critique : le pôle nord.

c) Comme $g(-x, -y, -z) = g(x, y, z)$, il existe une unique application h du projectif dans $\mathbb{S}^2$ telle que $g = h \circ \pi$. π étant un difféomorphisme

local, tout point de la sphère admet un voisinage ouvert U tel que $\pi(U)$ soit un ouvert de $\mathbb{P}^2$, la restriction de π à U soit injective et son inverse $\psi : \pi(U) \to U$ soit de classe $\mathcal{C}^\infty$. La restriction de h à $\pi(U)$ est alors $g \circ \psi$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent h est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

d) g étant surjective, h l'est. π étant un difféomorphisme local, son application linéaire tangente est inversible en tout point. Comme

$$T_{(x,y,z)}g = T_{\pi(x,y,z)}h \circ T_{(x,y,z)}\pi,$$

$T_{(x,y,z)}g$ et $T_{\pi(x,y,z)}h$ ont même rang. Par conséquent l'ensemble des points critiques de h est le cercle $\pi(E)$. h admet une unique valeur critique : le pôle nord.