10 Volumes et cohomologie

Exercice 10.1 (*Volume de la sphère)***.** On se propose d'intégrer la forme $\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ définie sur la sphère privée du pôle sud par

$$\omega|_{U_S} = 4\frac{dx_S \wedge dy_S}{(1+\rho_S)^2}$$

où x_S, y_S sont les coordonnées obtenues par projection stéréographique et $\rho_S = x_S^2 + y_S^2$.

a) Exprimer la restriction de ω à U_S en fonction de dr et $d\theta$ où r et θ sont des coordonnées polaires telles que $(x_S, y_S) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

b) Donner une primitive de ω sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ de la forme $f(r)d\theta$

c) Déduire du théorème de Stokes l'intégrale $I(\epsilon)$ de ω sur le domaine

$$\{z \in U_S / \ \epsilon^2 \leqslant x_S(z)^2 + y_S(z)^2 \leqslant \epsilon^{-2}\}.$$

d) Justifier que $I(\epsilon)$ converge vers $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$ quand ϵ tend vers 0.

Exercice 10.2 (*Théorème de la boule chevelue)***.** On se propose de montrer que tout champ de vecteurs de la sphère admet au moins un zéro. Supposons que X soit un champ de $\mathbb{S}^2$ qui ne s'annule pas. On identifie $\mathbb{S}^2$ à la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et donc

$$X(x) = (x, f(x))$$

où f est une application de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(x)$ et x soient orthogonaux pour tout x. Quitte à renormaliser, on peut supposer que la norme de $f(x)$ est constante égale à 1 pour tout x. Pour tout $\epsilon > 0$, on introduit l'application Ψ_ϵ de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Psi_\epsilon(x) = x + \epsilon f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)$$

et on note φ_ϵ sa restriction à $\mathbb{S}^2$.

a) Montrer que φ_ϵ est injective lorsque ϵ est suffisamment petit.

b) Montrer que pour ϵ suffisamment petit l'application linéaire tangente $T_x\Psi_\epsilon$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{S}^2$.

c) En déduire que φ_ϵ est un plongement lorsque ϵ est suffisamment petit.

d) Montrer par un argument de connexité que son image est la sphère de rayon $r_\epsilon = \sqrt{1+\epsilon^2}$.

e) Par conséquent, φ_ϵ induit un difféomorphisme χ_ϵ de $\mathbb{S}^2$ dans $r_\epsilon\mathbb{S}^2$. On suppose que $\mathbb{S}^2$ et $r_\epsilon\mathbb{S}^2$ sont orientées comme bord des boules de rayon 1 et r_ϵ respectivement. Pourquoi χ_ϵ préserve-t-il l'orientation ?

f) Soit j_ϵ le plongement de $r_\epsilon \mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\beta = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$. Montrer que

$$\int_{r_\epsilon \mathbb{S}^2} j_\epsilon^* \beta$$

dépend de manière polynomiale de ϵ. On utilisera que $j_\epsilon \circ \chi_\epsilon = \varphi_\epsilon = \Psi_\epsilon \circ j_0$.

g) En utilisant que l'homothétie de rapport r_ϵ induit un difféomorphisme de $\mathbb{S}^2$ dans $r_\epsilon \mathbb{S}^2$, montrer que

$$\int_{r_\epsilon \mathbb{S}^2} j_\epsilon^* \beta = r_\epsilon^3 \int_{\mathbb{S}^2} j_0^* \beta.$$

Aboutir à une contradiction.

Exercice 10.3. Soit M une variété munie d'une involution φ. On pose

$$\Omega^k_\varphi(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) / \ \varphi^* \alpha = \alpha\}.$$

a) Montrer que $(\Omega^\bullet_\varphi(M), d)$ est un sous-complexe de $(\Omega^\bullet(M), d)$, que $H^k(\Omega^\bullet_\varphi(M), d)$ s'identifie à un sous-espace $H^k_\varphi(M)$ de $H^k(M)$ et que $\frac{1}{2}(\mathrm{Id} + \varphi^*)$ définit un projecteur de $H^k(M)$ d'image $H^k_\varphi(M)$.

b) On suppose φ sans point fixe et l'on note N le quotient de M par $\{\mathrm{Id}, \varphi\}$. Montrer que $H^k(N)$ est isomorphe à $H^k_\varphi(M)$.

c) Utiliser ce qui précède pour calculer la cohomologie des espaces projectifs.

d) Soit P une variété sur laquelle agit proprement et librement un groupe discret Γ. On suppose que Γ admet un sous-groupe normal Γ_0 tel que $\Gamma/\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Appliquer ce qui précède avec $M = P/\Gamma_0$ et $N = P/\Gamma$.

e) Montrer que le ruban de Moebius est un quotient de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Calculer sa cohomologie avec la méthode précédente. Ne pouvait-on pas faire plus simple ?

f) Montrer que la bouteille de Klein est un quotient du tore par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Calculer sa cohomologie.