3 Variétés

Exercice 3.1 (*Variété de dimension 1)*.

1) Rappeler comment sont définies les cartes usuelles sur le tore, la sphère et le projectif.

2) Montrer que ces trois variétés sont difféomorphes.

Exercice 3.2 (*Quadriques)*.

Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$.

1) Montrer que c'est une sous-variété difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.

2) Représenter les différents cas pour $n + p = 3$.

Exercice 3.3 (*Hypersurface algébrique)*.

1) Soit P un polynome homogène de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $d_x P \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que

$$\{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] / P(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que pour $P = x_0^2 + \ldots + x_i^2 - (y_0^2 + \ldots + y_j^2)$ avec i et j strictement positifs on obtient une sous-variété difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^j$ par l'action de $\mathbb{Z}_2$, où l'élément non trivial agit par l'antipodie sur chaque facteur.

Exercice 3.4 (*Action libre et propre d'un groupe discret)*.

Soit G un groupe discret qui agit librement par homéomorphismes sur un espace métrique X. Montrer que l'action est propre ssi pour toutes suites (x_n) de X et (g_n) de G, (x_n) et $(g_n x_n)$ convergent implique que (g_n) est stationnaire.

Exercice 3.5 (*Tore de révolution)*.

Donner un difféomorphisme entre le tore $\mathbb{T}^2$ défini comme le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et le tore de révolution défini comme la sous-variété de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$$

avec r et R des réels tels que $0 < r < R$.

Exercice 3.6 (*Ruban de Moebius)*.

Définir une structure de variété sur le quotient de $B = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ par le groupe engendré par la transformation qui envoie (x, s) sur $(x + 1, -s)$. Donner un plongement de cette variété dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.7 (*Plan projectif*)**.**

1) Les applications de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

$$[x:y:z] \to \frac{(yz, zx, xy)}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(paramétrage de la surface romaine)}$$

$$[x:y:z] \to \frac{(yz, zx, \frac{1}{2}(x^2-y^2))}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(paramétrage du bonnet croisé)}$$

sont-elles des immersions, des plongements ?

2) Montrer que l'application

$$\mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4, \qquad [x:y:z] \to \frac{(yz, zx, xy, x^2+2y^2+3z^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

est un plongement du plan projectif dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.8 (*Bouteille de Klein*)**.**

La bouteille de Klein est définie comme le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par le groupe des transformations engendré par

$$(x, y) \to (x+1, y), \qquad (x, y) \to (-x, y+1).$$

1) Munir la bouteille de Klein d'une structure de variété.

2) Représenter une immersion de la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^3$.

3) Donner un plongement dans $\mathbb{R}^4$.

4) Donner un difféomorphisme local du tore dans la bouteille de Klein tel que chaque point de l'image ait exactement deux antécédents.

Exercice 3.9 (*Un quotient non-séparé*)**.**

On considére l'action de $\mathbb{Z}$ sur le plan privé de l'origine donnée par

$$(x, y) \to (2^n x, 2^{-n} y), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

1) Montrer que le quotient n'est pas séparé

2) Décrire le quotient de chaque quart de plan ouvert et de chaque demi-axe. Expliquer comment se recollent ces différentes parties.

Exercice 3.10 (*Orientabilité*)**.**

a) Montrer qu'une variété n'est pas orientable si elle admet deux cartes (U, φ) et (V, ψ) telles que U et V soient connexes et $\det((T_x\varphi) \circ (T_x\psi)^{-1})$ prenne à la fois des valeurs positives et négatives lorsque x décrit $U \cap V$.

b) Montrer que le ruban de Moebius et la bouteile de Klein ne sont pas orientables.

c) Montrer que l'espace projectif est n'est pas orientable si sa dimension est paire.

Exercice 3.11 (*Quotient et orientabilité).*

a) Soit M une variété orienté. On dit qu'un difféomorphisme f de M dans M préserve l'orientation si pour toute carte (U, φ) et (V, Ψ) de l'atlas fournissant une orientation, l'on a

$$\det(T_{\varphi(x)}(\Psi \circ f \circ \varphi)) > 0, \qquad \forall x \in U \cap f^{-1}(V).$$

On suppose qu'un groupe discret agit librement et proprement sur M par des difféomorphismes préservant l'orientation. Montrons que le quotient est naturellement orienté.

b) Montrer que les espaces projectifs de dimension impaire sont orientables.