4 Variétés et groupes de Lie

On note $\mathrm{M}(n)$ l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients réels et on rappelle que le groupe linéaire $\mathrm{Gl}(n) \subset \mathrm{M}(n)$ formé des matrices inversibles est un ouvert dense de $\mathrm{M}(n)$.

Exercice 4.1 (*Groupe spécial linéaire)*.
Montrer que le groupe $\mathrm{Sl}(n)$ des matrices de déterminant 1 est un sous variété de $\mathrm{Gl}(n)$. Quel est son espace tangent en l'identité ?

Exercice 4.2 (*Groupe orthogonal)*.
1) Montrer que le groupe $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Gl}(n)$ des matrices orthogonales et son sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ sont des sous-variétés de $\mathrm{M}(n)$. Donner leur dimension et espace tangent en l'identité. On considèrera la submersion $X \to X^t X$ de $\mathrm{M}(n)$ sur l'ensemble des matrices symétriques.

2) Montrer que $\mathrm{SO}(2)$ est difféomorphe à un cercle et $\mathrm{O}(2)$ à la réunion disjointe de deux cercles.

3) Montrer que $\mathrm{SO}(n)$ est connexe et que $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes, $\mathrm{SO}(n)$ et son complémentaire [1]

Exercice 4.3 (*Décomposition polaire)*.
On note $\mathrm{S}(n) \subset \mathrm{M}(n)$ l'ensemble des matrices réelles symétriques et $\mathrm{S}^+(n)$ le sous-ensemble des matrices positives et non dégénérées.

1) Montrer que $\mathrm{S}^+(n)$ est un cône convexe et une partie ouverte de $\mathrm{S}(n)$. On utilisera que $S \in \mathrm{S}(n)$ est définie positive ssi il existe $k > 0$ tel que $x^t S x \geqslant k x^t x$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. Une autre preuve consiste à montrer que l'application $\mathrm{Gl}(n) \to \mathrm{S}^+(n)$ qui à G associe $G^t G$ est surjective et submersive.

2) Montrer que l'application de $\mathrm{S}^+(n)$ qui à M asssocie M^2 est un difféomorphisme. En déduire que l'application

$$\mathrm{O}(n) \times \mathrm{S}^+(n) \to \mathrm{Gl}(n). \qquad (O, M) \to OM$$

est un difféomorphisme. Combien $\mathrm{Gl}(n)$ a-t-il de composantes connexes ?

[1] On rappelle que toute matrice de $\mathrm{SO}(m)$ est conjugué dans $\mathrm{SO}(m)$ à une matrice par blocs diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & \\ & R(\theta_2) & & \\ & & \ldots & \\ & & & R(\theta_\ell) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & R(\theta_2) & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & R(\theta_\ell) & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

selon que $m = 2\ell$ ou $2\ell + 1$, avec $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exercice 4.4 (*Le groupe* SU(2)*)*.

Montrer que l'application

$$(u,v) \in \mathbb{C}^2 \to \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$$

se restreint en un plongement de la sphère de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ dans $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ d'image SU(2). Conclure que SU(2) est une sous-variété de $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ et décrire son espace tangent en l'identité.

Exercice 4.5 (*Le groupe des rotations)*.

1) Montrer que SO(3) est formé des rotations de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que toute rotation est un produit $R^z_\theta R^y_\varphi R^z_\psi$, où R^z_θ, R^z_ψ, R^y_φ sont les rotations d'angles θ, ψ, φ par rapport aux axes Oz et Oy respectivement. θ, φ et ψ sont les angles d'Euler. Peut-on les utiliser pour définir des cartes sur SO(3) ?

3) Le but de ce qui suit est de montrer que SO(3) est difféomorphe à l'espace projectif réel de dimension 3. Identifier $\mathbb{R}^3$ et l'espace des matrices anti-hermitiennes 2×2 par l'application

$$x = (x_1, x_2, x_3) \to M(x) = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_1 + ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -ix_3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$, l'application $\Phi(A)$ de $\mathbb{R}^3$ qui à x associe y tel que $M(y) = AM(x)A^*$ est bien définie et préserve le produit scalaire

$$(x,y) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(M(x)M(y)^*)$$

Montrer que l'application $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$ ainsi définie est un morphisme de groupe. Expliciter les images de

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

En utilisant la décomposition d'Euler et le fait que SU(2) est connexe, montrer que l'image de Φ est SO(3). Montrer que le noyau de Φ est réduit à $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

4) Calculer l'application linéaire tangente à Φ en l'identité. En déduire que Φ est un difféomorphisme local. Conclure que SO(3) est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.