5 Fibrés vectoriels

Exercice 5.1 (*Différentielles)*.

1) Rappeler pourquoi la différentielle d'une fonction est une section du fibré cotangent.

2) Soient une application $\varphi : M \to \mathbb{R}^\ell$, un ouvert U de $\mathbb{R}^\ell$ qui contient l'image de φ et $g \in C^\infty(U)$. Montrer que

$$d(g \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{\ell} (\partial_i g \circ \varphi) d\varphi^i$$

où $\varphi^1, \ldots, \varphi^\ell$ sont les fonctions coordonnées de φ et $\partial_1 g, \ldots, \partial_\ell g$ sont les dérivées partielles de g. En application, calculer la différentielle de la fonction

$$f(x) = \cos(\varphi^1(x)\varphi^2(x)) + \varphi^1(x)\varphi^3(x)$$

où $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 \in C^\infty(M)$.

Exercice 5.2 (*Changement de coordonnées dans le plan)*.

1) Rappeler comment on associe à un système de coordonnées $(U, x^1, \ldots, x^n)$ d'une variété un repère $(dx^1, \ldots, dx^n)$ de son cotangent au dessus de U et un repère $(\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^n})$ de son tangent au dessus de U.

2) On note x et y les coordonnées linéaires de $\mathbb{R}^2$ et $x' = x + y$, $y' = y$. Calculer dx' et dy' en fonction de dx et dy, puis $\partial_{x'}$ et $\partial_{y'}$ en fonction de ∂_x et ∂_y. Qu'observez-vous ?

3) Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)/x \leqslant 0\}$ et $r, \theta \in C^\infty(U)$ les coordonnées polaires sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$. Calculer les champs de vecteurs

$$x\partial_x + y\partial_y \quad \text{(Euler)}, \qquad x\partial_y - y\partial_x \quad \text{(oscilateur harmonique)}$$

en fonction de ∂_r et ∂_θ.

Exercice 5.3 (*Rotations infinitésimales)*.

a) Montrer que le produit vectoriel $\times$ munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure d'algèbre de Lie.

b) A tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, on associe le champ de vecteurs $L_v(x) = (x, v \times x)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $[L_v, L_u] = L_{u \times v}$.

Exercice 5.4 (*Champs de vecteurs sur la sphère)*.

On considère la sphère comme la compactification du plan $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ où le plongement j est l'inverse d'une projection stéréographique. Montrer

que tout champ de vecteurs constant du plan se prolonge à la sphère. Même question avec le champ d'Euler.

On rappelle que si (x_N, y_N) et (x_S, y_S) sont les coordonnées obtenues par projection stéréographique par rapport aux pôles nord et sud respectivement, on a au dessus de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$

$$x_N = \frac{x_S}{x_S^2 + y_S^2}, \qquad y_N = \frac{y_S}{x_S^2 + y_S^2}$$

Exercice 5.5 (*Fibré tangent du tore)*.

Montrer qu'un fibré muni d'un atlas tel que toutes ses fonctions de transition soient constantes égales à l'identité, est trivial. En déduire que les tores sont parallélisables.

Exercice 5.6 (*Sphères de dimension impaire.)*.

a) Montrer que l'on a un isomorphisme de $C^\infty(\mathbb{S}^n)$-module entre l'espace des champs de vecteurs de la sphère $\mathbb{S}^n$ et

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1}) / \ \forall x \in \mathbb{S}^n, x \perp f(x)\}$$

b) Montrer qu'une sphère de dimension impaire admet un champ de vecteurs qui ne s'annule nulle-part.

c) Montrer que $\mathbb{S}^3$ est parallélisable.

d) Montrer que les sphères dont la dimension est congrue à 3 modulo 4 admettent 3 champs de vecteurs qui forment une famille libre en tout point.

Exercice 5.7 (*Un fibré sur le cercle qui n'est pas trivial)*.

Soit p la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $D_{p(x)}$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ qui fait un angle de πx avec l'axe des abscisses. Considérons

$$\gamma := \{(\xi, u) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2 / \ u \in D_\xi\} = \bigcup_{\xi \in \mathbb{T}^1} \{\xi\} \times D_\xi$$

a) Montrer que γ est un sous-fibré de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$. Pour cela, considérer les deux sections locales

$$s_1 : p(]0,1[) \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2, \quad s_1(p(x)) = (p(x), \cos(\pi x), \sin(\pi x)) \text{ si } x \in]0,1[$$
$$s_2 : p(]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[) \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2, \quad s_2(p(x)) = (p(x), \cos(\pi x), \sin(\pi x)) \text{ si } x \in]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}[$$

et constater que pout tout $\xi \in \mathbb{T}$, D_ξ est engendré par $s_1(\xi)$ ou $s_2(\xi)$. Vérifier ensuite que $s_1 = -s_2$ sur $p(]0, \frac{1}{2}[)$ et $s_1 = s_2$ sur $p(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

b) Montrer que γ privé de la section nulle est connexe. En déduire que γ n'est pas isomorphe au fibré trivial sur le cercle.

c) Montrons que γ est difféomorphe au ruban de Moebius M. On rappelle que M est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{Z}$, l'action étant

$$n.(x,y) = (x+n, (-1)^n y).$$

De plus, la projection canonique $\mathbb{R}^2 \to M$ est un difféomorphisme local. Montrer alors que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \to (p(x), y\cos(\pi x), y\sin(\pi x))$$

se factorise en un plongement $j : M \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2$ d'image γ.

Exercice 5.8 (*Fibré tautologique de l'espace projectif)***.**

Montrer que

$$E = \{(x,u) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} / u \in x\}$$

est un sous-fibré du fibré trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. On l'appelle fibré tautologique. En donner des trivialisations sur les ouverts $O_k = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n / \ x_k \neq 0\}$ telles que les fonctions de transition soient

$$O_k \cap O_j \to \mathbb{R}^*, \quad [x_0 : \ldots : x_n] \to x_k/x_j.$$

Montrer que ce fibré n'est pas isomorphe au fibré trivial.