7 Puissances extérieures

Exercice 7.1 (*Premiers pas*)**.**

Soit un espace vectoriel E de dimension 1, 2 ou 3, muni d'une base (e_i). Donner la dimension de $\wedge^k E$ et sa base déduite de la base (e_i). Expliquer comment on calcule le produit extérieur dans ces bases.

Exercice 7.2 (*Famille libre et produit extérieur*)**.**

Montrer que k vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ forment une famille libre si et seulement si $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \neq 0$. Montrer que $x_1, \ldots, x_k$ sont linéairement dépendants si et seulement si $\alpha(x_1, \ldots, x_k) = 0$ pour toute forme alternée α de degré k.

Exercice 7.3 (*Formes décomposables*)**.**

Une forme de $\wedge^k E^*$ est dite *décomposable* si elle est produit de k formes de degré 1. On note n la dimension de E.

a) Constater que les formes de degré 1 et n sont décomposables.

b) Montrer que les formes de degré $n-1$ sont décomposables (étant donné $\alpha \in \wedge^{n-1} E^*$, on pourra considérer l'application R_α de E^* dans $\wedge^n E^*$ qui à ℓ associe $\ell \wedge \alpha$).

c) Si $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ sont des formes linéaires de degré 1 linéairement indépendantes, montrer que

$$\alpha = \ell_1 \wedge \ell_2 + \ell_3 \wedge \ell_4$$

n'est pas décomposable (considérer $\alpha \wedge \alpha$).

d) L'annulateur d'une forme $\alpha \in \wedge E^*$ est le sous-espace de E^*

$$\{\ell \in E^* / \ \ell \wedge \alpha = 0\}$$

Montrer que si α est non-nulle la dimension de son annulateur est inférieure au degré de k avec égalité si et seulement si α est décomposable.

Exercice 7.4 (*Formes de degré 2*)**.** Etant donné une base $\ell = (\ell_i)_{i=1,\ldots,n}$ de E^* et un entier k tel que $2k \leqslant n$, on définit

$$\omega_{k,\ell} = \ell_1 \wedge \ell_2 + \ldots + \ell_{2k-1} \wedge \ell_{2k}$$

a) Soit (e_i) la base duale de (ℓ_i). Calculer $\omega_{k,\ell}(e_i, e_j)$. Donner la matrice de ω_k dans la base (e_i).

b) Calculer les puissances extérieures k-ième et $(k+1)$-ième de $\omega_{k,\ell}$.

Soit une forme ω de degré 2. On se propose de montrer qu'il existe un unique entier k et une base (ℓ_i) tels que $\omega = \omega_{k,\ell}$. Soit B_ω l'application $E \to E^*$ qui à x associe $\omega(x, \cdot)$.

c) Quel est le rang de $B_{\omega_{k,\ell}}$?

On dit qu'un sous-espace F de E est ω-symplectique si la restriction de ω à F est non-dégénérée, c'est à dire que pour tout $x \in F$ non nul il existe $y \in F$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.

d) Montrer qu'un supplémentaire du noyau de B_ω est symplectique.

e) On suppose ω non-dégénérée. Montrer que si $F \subset E$ est symplectique, alors

$$F^{\perp_\omega} = \{x \in E / \ \omega(x, y) = 0, \ \forall y \in F\}$$

est symplectique et est en somme directe avec F.

f) Montrer que $\omega = \omega_{k,\ell}$ avec k et (ℓ_i) convenablement choisis.

g) Montrer que ω est décomposable ssi $k = 1$.

Exercice 7.5 (*Complexe de Koszul)***.** Soit ℓ une forme linéaire non nulle. On note ϵ_k l' application $\wedge^k E^* \to \wedge^{k+1} E^*$ qui à α associe $\ell \wedge \alpha$.

a*)* Montrer que

$$\ldots \to \wedge^{k-1} E^* \xrightarrow{\epsilon_{k-1}} \wedge^k E^* \xrightarrow{\epsilon_k} \wedge^{k+1} E^* \to \ldots$$

est un complexe différentiel acyclique.

b) Quelle est sa caractéristique d'Euler ?

c) Soit D une droite vectorielle de E en somme directe avec $F := \ker \ell$ et p la projection de E sur F parallèlement à D. Montrer que l'application

$$p^* : \wedge^k F^* \to \wedge^k E^*$$

est injective et que $p^*(\wedge^k F^*)$ est en somme directe avec $\ker \epsilon_k$.