8 Formes différentielles

Exercice 8.1 (*Sur la sphère)*. On rappelle que l'on définit sur la sphère par projection stéréographique deux systèmes de coordonnées $(U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, x_N, y_N)$ et $(U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, x_S, y_S)$. L'on a

$$(x_S, y_S) = \frac{(x_N, y_N)}{\rho_N} \text{ avec } \rho_N = x_N^2 + y_N^2.$$

a) Exprimer dx_S, dy_S, $dx_S \wedge dy_S$ en fonction de dx_N, dy_N et $dx_N \wedge dy_N$.

b) Décrire les formes différentielles de la sphère à l'aide des repères $(1, dx_S, dy_S, dx_S \wedge dy_S)$ et $(1, dx_N, dy_N, dx_N \wedge dy_N)$ de $\wedge T^*\mathbb{S}^2$

c) Vérifier que la deux-forme ω donnée sur U et V par

$$\omega|_U = -4\frac{dx_N \wedge dy_N}{(1+\rho_N)^2}, \qquad \omega|_V = 4\frac{dx_S \wedge dy_S}{(1+\rho_S)^2}$$

est bien définie sur la sphère.

Exercice 8.2 (*Produit vectoriel, div, grad et rot)*. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$. En identifiant convenablement $\Omega^0(U)$, $\Omega^3(U)$ avec $C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $\Omega^1(U)$, $\Omega^2(U)$ avec $C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$, exprimer le produit extérieur et la différentielle des formes en fonction des produits vectoriels et scalaires, de la divergence, du gradient et du rotationnel. Réécrire les formules suivantes à l'aide du produit extérieur et de la différentielle.

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = 0 \\
\operatorname{div}(fV) = f \operatorname{div} V + (\operatorname{grad} f) \cdot V \\
\operatorname{rot}(fV) = f \operatorname{rot} V + (\operatorname{grad} f) \times V \\
\operatorname{div}(V \times W) = V \cdot \operatorname{rot} W - W \cdot \operatorname{rot} V
\end{gathered}$$

avec $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $V, W \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ et "$\times$" désignant le produit vectoriel.

Exercice 8.3 (*Formes invariantes sur la sphère)*. Déterminer la dimension du sous-espace de $\wedge^k T^*\mathbb{S}^2$ composé des formes invariantes par rotation. En degré 2, on pourra considérer la forme définie par

$$\alpha_x(Y, Z) = \det(x, Y, Z)$$

pour tout $x \in \mathbb{S}^2$ et $Y, Z \in T_x\mathbb{S}^2$.

Exercice 8.4 (*Forme angulaire*)**.** Vérifier que la forme α de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

est fermée. Déterminer l'image réciproque $\varphi^*\alpha$ où φ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\theta \in \mathbb{R} \to (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que α n'est pas exacte.

Exercice 8.5 (*Forme volume de la sphère*)**.** On note $X = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ le champ d'Euler de $\mathbb{R}^3$, ω la forme volume $dx \wedge dy \wedge dz$ de $\mathbb{R}^3$ et i le plongement de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que X, ω et $\beta = \iota_X\omega$ sont invariants par rotation.

b) Vérifier que la restriction à $\mathbb{S}^2$ de β est une forme volume.

c) Comparer $i^*\beta$ avec la forme ω de l'exercice 8.1. On rappelle que

$$i \circ \varphi_V^{-1} : (x_S, y_S) \to (x, y, z) = \Big(\frac{2x_S}{1+\rho_S}, \frac{2y_S}{1+\rho_S}, \frac{1-\rho_S}{1+\rho_S}\Big)$$

ou $(V, \varphi_V, \mathbb{R}^2)$ est la carte de $\mathbb{S}^2$ obtenue par projection stéréographique par rapport au pôle sud.

Exercice 8.6 (*Formes homogènes*)**.** Soit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et H_t l'homothétie de rapport t de $\mathbb{R}^n$. Une forme $\alpha \in \Omega^k(U)$ est dite homogène de degré p si

$$H_t^*\alpha = t^p\alpha$$

pour tout $t > 0$.

a) Exprimer l'homogénéité de $\alpha \in \Omega^k(U)$ en fonction de ses coefficients dans la base des $(dx_I)_{I \in \mathcal{P}(\{1,\dots,n\})}$.

b) Soit $X = \sum x^i\partial_{x^i}$ le champ de vecteurs d'Euler. Montrer qu'une forme α est homogène de degré p ssi

$$\mathcal{L}_X\alpha = p\alpha.$$

Exercice 8.7 (*Super-dérivations*)**.** Soit M une variété. On appelle super-dérivation de $\Omega^\cdot(M)$ de degré k un opérateur (*i.e.* une application linéaire) D tel que

$$D(\Omega^\ell(M)) \subset \Omega^{k+\ell}(M), \qquad \forall \ell$$

et pour toutes formes α de degré ℓ et β de degré quelconque

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\ell.k}\alpha \wedge D\beta.$$

Montrer que le supercommutateur

$$[D, D'] = DD' - (-1)^{k.k'} D'D$$

de deux super-dérivations D et D' de degré k et k' respectivement est une super-dérivation de degré $k + k'$.

Vérifier que la différentielle, la dérivée de Lie et le produit intérieur sont des super-dérivations de $\Omega^{\cdot}(M)$. Montrer que

$$[\mathrm{d}, \mathrm{d}] = 0, \qquad [\mathcal{L}_X, \mathrm{d}] = 0, \qquad [\iota_X, \mathrm{d}] = \mathcal{L}_X$$
$$[\iota_X, \iota_Y] = 0, \qquad [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}, \qquad [\mathcal{L}_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$$

Exercice 8.8 (*Coordonnées polaires).* Considérons l'application φ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(\rho, t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$.

a) Soit I un intervalle ouvert de longueur plus petite que 2π. Montrer que φ induit un difféomorphisme φ_I de $\mathbb{R}^+ \times I$ sur $\varphi(\mathbb{R}^+ \times I)$.

b) Soit le système de coordonnées (r, θ) sur $\varphi(\mathbb{R}^+ \times I)$ tel que $\varphi_I^{-1} = (r, \theta)$. Montrer que les formes dr et $d\theta$ s'étendent à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ en des formes indépendantes de I.

Exercice 8.9 (*Formes différentielles et quotient).* Soit M le quotient d'une variété N par l'action propre et libre d'un groupe discret. On note p la projection de N sur M. Montrer que

$$p^* : \Omega^{\cdot}(M) \to \Omega^{\cdot}(N)$$

est injective et décrire son image. En application décrire les formes différentielles du tore.

Exercice 8.10 (*Formes différentielles de l'espace projectif).* Soit p la projection de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Montrer que p^* est injective et que son image est l'ensemble des formes α de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ telle que

$$\iota_X \alpha = 0, \qquad \varphi_\lambda^* \alpha = \alpha, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

où X est le champ d'Euler et φ_λ l'homothétie de rapport λ.