9 Cohomologie de Rham

Exercice 9.1. Soit $P_1, \ldots, P_k$ des hyperplans affines propres de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints.

a) Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus P_\ell$ à le même type d'homotopie qu'une sphère de dimension $n-1-\dim P_\ell$.

b) Montrer que les espaces de cohomologie de $M = \mathbb{R}^n \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_k)$ sont de dimension finie et que les nombres de Betti sont données par

$$b_p(M) = b_p(\mathbb{R}^n) + \sharp\{\ell / \dim(P_\ell) = n-1-p\}.$$

On pourra raisonner par récurrence et appliquer le théorème de Mayer-Vietoris à $U = \mathbb{R}^n \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_k)$ et $V = \mathbb{R}^n \setminus P_{k+1}$.

Exercice 9.2. Soit A une partie fermée propre de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times [0, \infty[$ est contractible.

b) Appliquer le théorème de Mayer-Vietoris à $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times]-\infty, 0])$ et $V = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times [0, \infty[$. En déduire que

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \{0\})) = H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R}$$

et pour $k \geqslant 2$,

$$H^{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \{0\})) = H^k(\mathbb{R}^n \setminus A).$$

Exercice 9.3 (*Cohomologie des tores).*

Soient (I_1, I_2) un recouvrement du cercle par deux intervalles ouverts.

a) Soient $U = I_1 \times M$ et $V = I_2 \times M$. Déterminer le noyau et l'image des applications

$$H^k(U) \oplus H^k(V) \to H^k(U \cap V)$$

de la suite longue exacte de Mayer-Vietoris.

b) En déduire que $H^k(M \times S^1) = H^k(M) \oplus H^{k-1}(M)$.

c) Donner les nombres de Betti du tore de dimension n.

Exercice 9.4 (*Cohomologie des tores, 2).*

a) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \in E^*$ une forme linéaire non-nulle. Vérifier que $(\wedge^\cdot E^*, \epsilon)$ est un complexe où ϵ est l'application produit extérieur par α. Montrer que ce complexe est acyclique.

b) Soit $\ell \in \mathbb{N}^n$ et e_ℓ la fonction de $\mathbb{R}^n$ qui envoie x sur $\exp(2i\pi\langle \ell, x\rangle)$. Montrer que les espaces vectoriels

$$\Omega^k_\ell := \{e_\ell \alpha / \ \alpha \in \wedge^k(\mathbb{R}^n)^*\}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

forment un sous-complexe du complexe de de Rham de $\mathbb{R}^n$. Calculer sa cohomologie.

c) Retrouver les nombres de Betti du tore de dimension n (on n'essaiera pas de justifier la convergence des séries de Fourier).

Exercice 9.5 (*Cohomologie des surfaces orientables de genre g)***.**

a) Calculer la cohomologie d'un disque ouvert D privé de n points. On pourra appliquer le théorème de Mayer-Vietoris aux ouverts U et V où U est D privé des n points et V la réunion de n disques ouverts centrés aux points deux à deux disjoints et inclus dans D.

b) Donner le H^0 et le H^2 d'une surface orientable Σ de genre g.

c) Soit U l'ouvert de Σ obtenu en enlevant g cercles plongés de manière disjointe dans Σ, de sorte que U soit homéomorphe à la sphère privée de $2g$ points. Soit V la réunion disjointe de voisinages ouverts des cercles chacun homéomorphe à une couronne. En appliquant le théorème de Mayer-Vietoris à U et V, trouver le H^1 de Σ.