Examen de géométrie différentielle du 15 décembre 2010

Exercice 1 (*Espace de polygones planaires).*

Soient ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et ℓ_4 quatre réels strictement positifs.

a) Soit ℓ un réel > 0. Montrer que le cercle $C_\ell \subset \mathbb{R}^2$ de rayon ℓ et centré en l'origine est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Donner son espace tangent en chacun de ses points.

b) Soit f l'application de $C_{\ell_2} \times C_{\ell_3}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie (x_2, x_3) sur x_2+x_3. Pour tout $(x_2, x_3) \in C_{\ell_2} \times C_{\ell_3}$ déterminer $T_{(x_2,x_3)}f$, son rang et son image. On discutera selon que x_2 et x_3 sont colinéaires ou ne le sont pas.

c) Soit $x_1 \in \mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle de la fonction $g_{x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui envoie y sur $\|x_1 + y\|^2$, puis le noyau de $d_y g_{x_1}$.

d) Soient $x_1 \in C_{\ell_1}$, $x_2 \in C_{\ell_2}$, $x_3 \in C_{\ell_3}$ qui forment une famille génératrice et tels que $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$. Montrer que $d_{(x_2,x_3)}g_{x_1} \circ f$ n'est pas nulle.

e) On suppose que pour tout $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) \in \{-1, 1\}^4$, la somme

$$\epsilon_1\ell_1 + \epsilon_2\ell_2 + \epsilon_3\ell_3 + \epsilon_4\ell_4$$

ne s'annule pas. Soit $x_1 \in \mathbb{R}^2$ de norme ℓ_1. Munir

$$M = \{(x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{R}^2)^3 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \|x_i\| = \ell_i \text{ pour } i = 2, 3, 4\}$$

d'une structure de variété. Expliquer en quel sens M est l'ensemble des polygones planaires à quatre côtés de longueurs respectives ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et ℓ_4 à isométrie directe près.

Exercice 2 (*Cohomologie des espaces lenticulaires).*

Soient deux entiers p et q qui sont > 1 et premiers entre eux. On pose $u = \exp(2i\pi/q)$. L'espace lenticulaire L de paramètres p et q est défini comme le quotient de la sphère $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ par l'action suivante de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times S^3 \to S^3, \quad [m], (z_1, z_2) \to u^m z_1, u^{pm} z_2$$

On note π la projection canonique de S^3 sur L et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, φ_m l'application de S^3 dans lui même qui envoie (z_1, z_2) sur $(u^m z_1, u^{pm} z_2)$.

a) Montrer que cette action est libre. En déduire que L admet une structure de variété telle que π soit un difféomorphisme local.

b) Montrer que l'application $\pi^* : \Omega(L) \to \Omega(S^3)$ est injective.

c) Montrer que l'image de π^* est le sous-espace de $\Omega(S^3)$

$$\Omega_{\text{inv}}(S^3) = \{\alpha \in \Omega(S^3)/\ \forall m \in \mathbb{Z},\ \varphi_m^* \alpha = \alpha\}$$

d) Montrer que pour toute forme exacte $\alpha \in \Omega_{\text{inv}}(S^3)$, il existe $\beta \in \Omega_{\text{inv}}(S^3)$ tel que $d\beta = \alpha$. En déduire pour $k = 0, 1, 2$ ou 3, un isomorphisme entre $H^k(L)$ et le sous-espace

$$H^k_{\text{inv}}(S^3) := \{[\alpha]/\ \alpha \in \Omega_{\text{inv}}(S^3),\ d\alpha = 0\}$$

de $H^k(S^3)$.

e) Donner la dimension de $H^k(L)$ pour $k = 0, 1, 2$.

f) Montrer que S^3 admet une forme volume $\alpha \in \Omega^3_{\text{inv}}(S^3)$. En déduire la dimension de $H^3(L)$.

Exercice 3 (*Une inégalité isoperimétrique)***.**

Soit Σ une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ orientée de dimension 2. Pour tout $p \in \Sigma$, on appelle vecteur normal sortant de Σ en p le vecteur $\nu(p) \in \mathbb{R}^3$ normé orthogonal à $T_p\Sigma$ et tel que pour toute base directe (u, v) de $T_p\Sigma$, $(\nu(p), u, v)$ est directe.

a) Montrer que l'application de Σ dans $\mathbb{R}^3$ qui envoie p sur $\nu(p)$ est lisse. Indication : Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires, le produit vectoriel $u \times v$ est orthogonal au plan engendré par u et v. Ou bien le vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

b) Montrer que la formule suivante définit une forme différentielle a de degré 2 de Σ

$$a_p(u, v) = \det(\nu(p), u, v), \qquad \forall p \in \Sigma, \forall u, v \in T_p\Sigma$$

Si Σ est compacte, son aire $A(\Sigma)$ est définie comme l'intégrale de a. Soit α la forme différentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

c) Si Σ est la sphère centrée en 0 de rayon R, exprimer a en fonction de la restriction de α à Σ.

Soit M un domaine lisse compact de $\mathbb{R}^3$. Son volume $V(M)$ est défini comme l'intégrale de $dx \wedge dy \wedge dz$ sur M.

d) Montrer que si M est la boule fermée de $\mathbb{R}^3$ centrée en l'origine de rayon R,

$$V(M) = \frac{R}{3} A(\partial M).$$

e) Montrer que pour tout vecteurs u, v de $T_p\Sigma$, $\alpha_p(u, v) \leqslant \|p\| a_p(u, v)$.

f) En déduire que si M est contenu dans la boule de centre 0 de rayon R, alors

$$V(M) \leqslant \frac{R}{3} A(\partial M).$$

Corrigé 1.

a) $T_x C_\ell =$ la droite othogonale à x.

b) $T_{(x_2,x_3)} f : T_{x_2} C_{\ell_2} \times T_{x_3} C_{\ell_3} \to \mathbb{R}^2$ envoie $(\dot{x}_2, \dot{x}_3)$ sur $\dot{x}_2 + \dot{x}_3$. Si x_2 et x_3 sont colinéaires, son image est la droite orthogonale à x_2. Sinon, l'image est $\mathbb{R}^2$.

c) $d_y g_{x_1}(\dot{y}) = 2\langle x_1 + y, \dot{y}\rangle$.

d) Il faut montrer que l'image de $T_{(x_2,x_3)} f$ n'est pas inclue dans le noyau de $d_{x_2+x_3} g_{x_1}$. Ce noyau est la droite orthogonale à $x_1+x_2+x_3$. Si x_2 et x_3 ne sont pas colinéaires, l'image de $T_{(x_2,x_3)} f$ est $\mathbb{R}^2$. Sinon, l'image est la droite orthogonale à x_2 qui ne peut être confondue avec la droite orthogonale à $x_1 + x_2 + x_3$ car alors $x_1 + x_2 + x_3$ serait colinéaire à x_2, et donc x_1, x_2 et x_3 engendreraient une droite.

e) D'après la question précédente, l'ensemble

$$N = (g_{x_1} \circ f)^{-1}(\ell_4^2) = \{(x_2, x_3) \in C_{\ell_2} \times C_{\ell_3} / \ \|x_1 + x_2 + x_3\|^2 = \ell_4^2\}$$

est une variété (x_1, x_2 et x_3 ne peuvent appartenir à une même droite à cause de la condition sur les ℓ_i). L'application de N dans M qui envoie x_2, x_3 sur $(x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3)$ est une bijection.

Appelons polygone planaire à quatre côtés un 4-uplet $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in (\mathbb{R}^2)^4$. Les y_i représentent les sommets, et les côtés sont $x_1 = y_1 y_2$, $x = y_2 y_3$, $x_3 = y_3 y_4$ et $x_4 = y_4 y_1$. Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ agit sur les polygones en préservant la longueur des côtés. Chaque classe d'isométrie directe de polygones dont la longueur du premier côté est non nulle a un unique représentant avec le premier sommet en l'origine et le second sur la demi-droite $\{(t, 0) / \ t > 0\}$.

Corrigé 2.

a) Pour tout $(z_1, z_2) \in S^3$, z_1 et z_2 ne peuvent s'annuler en même temps. Donc $(u^m z_1, u^{pm} z_2) = (z_1, z_2)$ implique que $u^m = 1$ ou $u^{pm} = 1$. Comme p et q sont premier entre eux, cela implique que m est un multiple de q.

On a une action libre d'un groupe fini par difféomorphisme sur une variété, le quotient admet alors une unique structure de variété telle que la projection canonique soit un difféomorphisme.

b) π est surjective et pour tout $z \in S^3$, $(T_z \pi)^*$ est un isomorphisme de $\wedge T_z^* L$ sur $\wedge T_z^* S^3$.

c) Comme $\varphi_m \circ \pi = \pi$, toute forme de S^3 dans l'image de π^* est invariante par φ_m. Réciproquement, soit $\alpha \in \Omega(S^3)$ vérifiant $\varphi_m^* \alpha = \alpha$. Alors pour tout x dans M on définit $\beta_x \in \wedge T_x^* S^3$ par

$$\beta_x = ((T_z \pi)^*)^{-1}(\alpha_z) \quad \text{où} \quad z \in \pi^{-1}(x).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de z : si $\pi(z) = \pi(z')$, alors $z' = mz$ pour un certain m, et

$$((T_{z'}\pi)^*)^{-1} = ((T_z\pi)^*)^{-1} \circ (T_{z'}\varphi_m)^*.$$

D'autre part, π étant un difféomorphisme local α est bien lisse.

d) Si $\alpha = d\tilde{\beta}$ est invariante, alors $\alpha = d\beta$ avec

$$\beta = \frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1} \varphi_m^*\tilde{\beta} \tag{1}$$

qui est aussi invariante.

Comme π^* commute avec la différentielle, $H^k(L)$ est isomorphe avec $\{\alpha \in \Omega_{\text{inv}}(S^3)/\ d\alpha = 0\}/d(\Omega_{\text{inv}}(S^3))$.

e) L est connexe car quotient de S^3 qui l'est, donc $H^0(L) \simeq \mathbb{R}$. Comme le H^1 et le H^2 de la sphère sont réduits à (0), il en est de même pour L d'après la question d).

f) Soit $\tilde{\beta}$ une forme volume de S^3. Chaque φ_m préserve l'orientation, $\varphi_m^*\tilde{\beta} = f_m\tilde{\beta}$, avec f_m qui prend des valeurs strictement positives. Donc en moyennant $\tilde{\beta}$ (cf. équation (1)), on obtient une forme volume β de S^3 invariante. Comme $H^3(S^3) \simeq \mathbb{R}$, on déduit de la question d) que $H^3(L)$ est de dimension 1.

Corrigé 3.

a) Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ un plongement tel que $\varphi(U)$ soit un ouvert de Σ, alors $T_{\varphi(p)}\Sigma = \text{Im}(T_p\varphi)$ et donc

$$\nu(p) = \frac{\tilde{\nu}(p)}{\|\tilde{\nu}(p)\|} \quad \text{avec} \quad \tilde{\nu}(p) = T_p\varphi(e_1) \times T_p\varphi(e_2)$$

où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b) vérifier que la forme est bien lisse.

c) Pour $\Sigma = \{\|p\| = R\}$, on a $\nu(p) = p/R$ et donc pour tout $p \in \Sigma$

$$\alpha|_p(u, v) = \det(p, u, v) = Ra_p(u, v)$$

d) Comme $d\alpha = 3dx \wedge dy \wedge \wedge dz$, ça découle du théorème de Stokes et de la question c).

e) Il suffit de le montrer pour une base orthonormée (u, v). On la choisit directe et alors

$$\alpha_p(u, v) = \det(p, u, v) \leqslant \|p\|$$

et $a_p(u, v) = 1$.

f) Appliquer le théorème de Stokes à α, puis e).