Examen de géométrie différentielle du 14 Décembre 2011

Exercice 1. Soit p un entier non nul. Soit $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et f une application lisse de U dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y, z) \in U$, pour tout $t > 0$,

$$f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z)$$

Soit E le champ d'Euler de U défini par

$$E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

1) Calculer la dérivée de f par rapport à E.

2) Montrer que $X = f^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété de U.

3) Soit π l'application de X dans S^2 qui envoie un point u sur $u/\|u\|$. Montrer que π est une immersion injective.

4) On suppose que f ne s'annule pas sur U et que X est non-vide. En déduire que X est compact et que π est un difféomorphisme.

Corrigé.

1) Le vecteur tangent à la courbe $t \to (tx, ty, tz)$ en $t = 1$ a pour coordonnées (x, y, z), c'est donc le champ E en (x, y, z). D'où

$$(E.f)(x, y, z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} f(tx, ty, tz) = pf(x, y, z)$$

2) Il suffit de montrer que f est une submersion au dessus de 1, autrement dit que $d_u f \neq 0$ pour tout $u \in f^{-1}(1)$. Or

$$d_u f(E|_u) = (E.f)(u) = pf(u) = p$$

d'après la question 1).

3) Montrons que π est injective : si $\pi(u) = \pi(v)$, alors $u = tv$ avec $t > 0$. On a $1 = f(u) = t^p f(v) = t^p$, donc $t = 1$ et $u = v$.

Montrons que π est lisse. Soit p l'application de U sur S^2 qui envoie v sur $v/\|v\|$. L'application p est lisse, sa restriction à X est π, qui est donc lisse car X est une sous-variété de U.

Montrons que π est une immersion en $u \in X$, c'est à dire que

$$T_u\pi : T_u X \to T_{\pi(u)} S^2$$

est injective. $T_u\pi$ est la restriction de T_up à $T_uX \subset T_uU = \mathbb{R}^3$. L'application $T_up : \mathbb{R}^3 \to T_{p(u)}S^2$ est de rang 2, son noyau est la droite engendrée par $E(u)$. L'espace tangent à X en u est le noyau de d_uf, il ne contient pas $E(u)$ d'après la question 1). Donc $T_u\pi$ est injective.

4) Montrons que X est compact. $X = f^{-1}(1)$ est fermé, il reste à montrer que X est borné. Comme f ne s'annule pas et qu'elle prend la valeur 1 (X est non-vide), f prend seulement des valeurs strictement positives. La sphère étant compacte, il existe alors des réels strictement positifs m et M tels que

$$\forall v \in S^2, \qquad m \leqslant f(v) \leqslant M$$

Soit $u \in X$, alors $v = u/\|u\| \in S^2$ et $f(v) = 1/\|u\|^p$. Donc si p est positif, $\|u\| \leqslant m^{-p}$ et si p est négatif $\|u\| \leqslant M^{-p}$.

Montrons que π est surjective. Pour tout $v \in S^2$, on a vu que $f(v) > 0$. Alors $u = (f(v))^{-1/p}v$ appartient à X et $\pi(u) = v$.

Donc π est surjective, injective et immersive. X et la sphère ayant même dimension, π est aussi surjective. Par le théorème d'inversion locale, π est alors un difféomorphisme. Cela implique à nouveau que X est compact.

Une autre façon de faire : Considérer l'application g de U dans U qui envoie u sur $f(u)^{-1/p}u$. Vérifier qu'elle se restreint en une application de S^2 dans X qui n'est autre que l'inverse de π. Comme g est lisse, S^2 et X sont des sous-varitétés de U, π^{-1} est lisse.

Exercice 2. Soit a, b, c trois nombres réels. Soit X le champ de vecteurs du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, défini par

$$\forall\, u = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \qquad X(u) := \gamma_u'(0)$$

où $\gamma_u(t) = [(1 + ta)x : (1 + tb)y : (1 + tc)z]$ si $t \in \mathbb{R}$ est proche de 0. On rappelle que les trois cartes usuelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sont données par

$$\varphi_1([1 : x : y]) = (x, y), \quad \varphi_2([x : 1 : y]) = (x, y), \quad \varphi_3([x : y : 1]) = (x, y).$$

1) Donner l'expression de X dans les trois cartes.

2) En déduire le flot de X.

3) On suppose que $a < b < c$. Dessiner sommairement les courbes intégrales du champs dans chacune des trois cartes, en indiquant le sens de parcours. Mettre des signes disctinctifs permettant de retrouver la même courbe intégrale sur les trois cartes.

4) Soient $S_1 = [1 : 0 : 0]$, $S_2 = [0 : 1 : 0]$ et $S_3 = [0 : 0 : 1]$. Combien y a-t-il de trajectoires dont l'adhérence contient S_1 et S_2 (resp. S_2 et S_3, resp. S_1 et S_3) ?

Corrigé.

1) Si $u = [1 : x : y]$, alors

$$\varphi_1(\gamma_u(t)) = \Big(\frac{(1+tb)x}{1+ta}, \frac{(1+tc)x}{1+ta}\Big)$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_1(\gamma_u(t)) = ((b-a)x, (c-a)y)),$$

autrement dit l'expression du champ X dans la première carte est

$$X_1 = (b-a)x\frac{\partial}{\partial x} + (c-a)y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Un calcul similaire donne l'expression de X dans les cartes φ_2 et φ_3 :

$$X_2 = (a-b)x\frac{\partial}{\partial x} + (c-b)y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (a-c)x\frac{\partial}{\partial x} + (b-c)y\frac{\partial}{\partial y}.$$

2) On commence par chercher le flot Φ_t dans les cartes. Par exemple, $\Phi_t([1 : x : y]) = [1 : x(t) : y(t)]$ ssi $(x(t), y(t))$ est une courbe intégrale de X_1 d'origine (x, y) ssi

$$\begin{cases} x'(t) = (b-a)x(t) \\ y'(t) = (c-a)y(t) \end{cases} \qquad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases}$$

Ces équations admettent pour solution $(x(t), y(t)) = (e^{t(b-a)}x, e^{t(c-a)}y)$. Par conséquent

$$\Phi_t([1 : x : y]) = [1 : e^{t(b-a)}x : e^{t(c-a)}y]$$

De même, on a que

$$\Phi_t([x : 1 : y]) = [e^{t(a-b)}x : 1 : e^{t(c-b)}y],$$

et

$$\Phi_t([x : y : 1]) = [e^{t(a-c)}x : e^{t(b-c)}y : 1].$$

On en déduit que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,

$$\Phi_t([x : y : z]) = [e^{ta}x : e^{tb}y : e^{tc}z].$$

4) Comme $b - a > 0$ et $c - a > 0$, on a que

$$\lim_{t \to -\infty} \Phi_t([1 : x : y]) = [1 : 0 : 0]$$

et de même

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_t([x:y:1]) = [0:0:1]$$

Donc une infinité de trajectoires contiennent dans leur adhérence S_1 et S_3. On montre aussi que exactement 2 trajectoires ont S_1 et S_2 dans leur adhérence, il s'agit de $\{[x:1:0]/x>0\}$ et $\{[x:1:0]/x<0\}$. Et de même, exactement deux trajectoires ont dans leur adhérence S_2 et S_3.

Exercice 3. Soit μ une forme volume de la sphère S^3. Soit X un champ de vecteur de S^3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\Phi_t : S^3 \to S^3$ le flot de X au temps t.

1) Montrer que $\iota_X\mu$ est fermée si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t^*\mu = \mu$. (On pourra calculer la dérivée de Lie de μ par rapport à X)

2) On suppose que $\iota_X\mu$ est fermée. Montrer qu'il existe $\alpha \in \Omega^1(S^3)$ telle que $d\alpha = \iota_X\mu$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{S^3} \alpha \wedge d\alpha$$

ne dépend pas du choix de α.

Corrigé.

1) D'après la formule de Cartan, $\mathcal{L}_X\mu = d\iota_X\mu + \iota_X d\mu$. Or $d\mu = 0$ car μ est de degré maximal, donc $\iota_X\mu$ est fermée ssi $\mathcal{L}_X\mu = 0$.

Si $\Phi_t^*\mu = \mu$ pour tout temps, alors

$$\mathcal{L}_X\mu = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^*\mu = 0$$

Réciproquement, si $\mathcal{L}_X\mu = 0$, comme $\Phi_{t+s} = \Phi_s \circ \Phi_t$, on a que

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*\mu = \Phi_t^* \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Phi_s^*\mu = \Phi_t^*\mathcal{L}_X\mu = 0.$$

donc $\Phi_t^*\mu = \mu$ pour tout t.

2) Le deuxième groupe de cohomologie de la sphère étant réduit à $\{0\}$, toute forme de degré 2 fermée est exacte, ce qui montre l'existence de α. Comme le premier group de cohomologie de la sphère est aussi trivial, α est unique à une forme exacte près. On a que

$$\begin{aligned}(\alpha + d\beta) \wedge d\alpha =& \alpha \wedge d\alpha + (d\beta) \wedge d\alpha \\ =& \alpha \wedge d\alpha + d(\beta \wedge d\alpha)\end{aligned}$$

Donc par le théorème de Stokes,

$$\int_{S^3} (\alpha + d\beta) \wedge d\alpha = \int_{S^3} \alpha \wedge d\alpha$$

car le bord de S^3 est vide.

Exercice 4. Pour toute droite vectorielle ℓ de $\mathbb{R}^3$, on note $\ell^\perp$ le plan orthogonal de ℓ. Soit F la réunion disjointe des $\ell^\perp$ lorsque ℓ décrit $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, i.e.

$$F = \{(u, \ell) / \, \ell \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),\, u \in \ell^\perp\},$$

et soit π l'application de F dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ qui envoie (u, ℓ) sur ℓ.

1) Montrer que $\pi : F \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est un fibré vectoriel de rang 2.

2) Montrer que ce fibré n'est pas isomorphe à un fibré trivial.