Contrôle de géométrie différentielle du 26 octobre 2007

Exercice 1 (*Question de cours)*.
Donner la définition d'une sous-variété.

Exercice 2.
a) Montrer que l'application j de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

$$(t, \theta) \to (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$$

est un plongement. On note V son image.

b) Soit π la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe (x, y). La restriction de π à V est-elle une submersion ?

Exercice 3 (*Une surjection du plan projectif sur la sphère)*.
On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{P}^2$ le quotient de $\mathbb{S}^2$ par la relation d'antipodie. Soit f l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \to (2xz, 2yz, 1 - 2z^2)$$

a) Montrer que f se restreint en une application g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{S}^2$. Montrer que g est surjective.

b) Quels sont les points et valeurs critiques de g ?

c) On rappelle que la projection canonique $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ est un difféomorphisme local. Montrer qu'il existe une unique application $h : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{S}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g = h \circ \pi$.

d) Montrer que h est surjective. Donner ses valeurs et points critiques.