Contrôle de géométrie différentielle du 10 novembre 2006

Exercice 1 (*Question de cours)*. Donner la définition d'une immersion et la caractérisation différentielle des immersions.

Exercice 2 (*Quadriques de* $\mathbb{P}^3$*)*. On considère l'espace projectif réel de dimension 3 et l'on note $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^3$ ses coordonnées homogènes. On se propose d'étudier la quadrique projective

$$Q = \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^3 / \ \epsilon_1 x_1^2 + \epsilon_2 x_2^2 + \epsilon_3 x_3^2 + \epsilon_4 x_4^2 = 0\}$$

où chaque ϵ_i est égal à 1 ou -1.

a) Rappeler comment l'on définit des cartes sur $\mathbb{P}^3$.

b) Montrer que Q est une sous-variété de $\mathbb{P}^3$.

c) On suppose que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) = (1, 1, -1, -1)$. Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, le point

$$P(u, v) = [\cos(\pi u) : \sin(\pi u) : \cos(\pi(u + 2v)) : \sin(\pi(u + 2v))]$$

appartient à Q et ne dépend que des classes de u et v modulo $\mathbb{Z}$. Démontrer que l'application

$$(u, v) \mapsto P(u, v)$$

définit par passage au quotient un plongement du tore $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ dans $\mathbb{P}^3$, d'image Q.

d) Lorsque $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) = (1, 1, 1, -1)$, montrer que Q est difféomorphe à une sphère de dimension 2.