Contrôle de géométrie différentielle du 15 décembre 2006

Exercice 1 (*Question de cours).* Donner la définition d'un champ de vecteurs.

Exercice 2 (*Autour de la fibration de Hopf).* On note $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^1$ les sphères unité de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. On identifiera $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ de sorte que

$$\mathbb{S}^3 = \{(u,v)\in\mathbb{C}^2/\ |u|^2+|v|^2=1\}$$
$$\mathbb{S}^2 = \{(w,t)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}/\ |w|^2+t^2=1\}.$$

Excepté pour les questions de regularité où il est préférable d'uiliser des coordonnées réelles, on recommande de travailler au maximum en coordonnées complexes.

a) Montrer que l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$

$$(u,v)\in\mathbb{C}^2 \to (2u\overline{v},\ |u|^2-|v|^2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$$

se restreint en une application π de $\mathbb{S}^3$ dans $\mathbb{S}^2$. Montrer que pour tous couples (u,v) et (u',v') de $\mathbb{S}^3$, l'on a

$$\pi(u,v)=\pi(u',v') \Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R},\ (u',v')=e^{i\theta}(u,v) \tag{1}$$

Montrer que π est surjective et de classe C^∞.

b) On note U la sphère $\mathbb{S}^2$ privée du pôle nord $(0,1)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$\varphi : \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{S}^1, \qquad (u,v)\to(\pi(u,v),v/|v|)$$

est bien définie, bijective, envoie la fibre $\pi^{-1}(\{b\})$ sur $\{b\}\times\mathbb{S}^1$ pour tout $b\in U$ et que c'est un difféomorphisme. Formuler sans le démontrer un énoncé similaire lorsque U est la sphère privée du pôle sud.

c) On note $(\partial_{x_u},\partial_{y_u},\partial_{x_v},\partial_{y_v})$ le repère du fibré tangent de $\mathbb{R}^4$ associé aux coordonnées (x_u,y_u,x_v,y_v). Donner les courbes intégrales maximales de

$$X=-y_u\partial_{x_u}+x_u\partial_{y_u}-y_v\partial_{x_v}+x_v\partial_{y_v}.$$

d) Soit une fonction f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ telle que D_Xf soit identiquement nulle. Montrer qu'il existe $g\in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ telle que $g\circ\pi$ soit la restriction de f à la sphère.

Corrections

a) Soient $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. Supposons que $(u,v) \in \mathbb{S}^3$ et posons $w = 2u\overline{v}$, $t = |u|^2 - |v|^2$. Alors

$$|w|^2 + t^2 = 4|u|^2|v|^2 + (|u|^2 - |v|^2)^2 = (|u|^2 + |v|^2)^2 = 1$$

autrement dit $(w,t) \in \mathbb{S}^2$. π est donc bien définie comme application de $\mathbb{S}^3$ dans $\mathbb{S}^2$. Notons pour la suite que

$$\begin{cases} |u|^2 + |v|^2 = 1 \\ |u|^2 - |v|^2 = t \end{cases} \Rightarrow |u| = \sqrt{\frac{1}{2}(1+t)} \text{ et } |v| = \sqrt{\frac{1}{2}(1-t)}.$$

Supposons $\pi(u',v') = \pi(u,v)$. Les deux équations précédentes donnent immédiatement $|u'| = |u|$ et $|v'| = |v|$, et donc

$$u' = e^{i\alpha}u, \qquad v' = e^{i\beta}v$$

avec α et β dans $\mathbb{R}$. Discutons selon les valeurs de $t = |u|^2 - |v|^2$. Si $t = 1$, alors $v = 0$ et donc $(u',v') = e^{i\alpha}(u,v)$. Si $t = -1$, alors $u = 0$ et $(u',v') = e^{i\beta}(u,v)$. Si $|t| < 1$, alors u et v sont différents de 0 et $u'\overline{v}' = u\overline{v}$ implique $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$, d'où $(u',v') = e^{i\alpha}(u,v)$. Dans tous les cas, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$(u',v') = e^{i\theta}(u,v)$$

Reciproquement, cette condition implique immédiatement que $\pi(u',v') = \pi(u,v)$.

Si $b = (w,t) \in \mathbb{S}^2$ est différent du pôle nord et du pôle sud, alors $w \neq 0$ et un antécédent de b par π est

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+t)}, \frac{w}{|w|}\sqrt{\frac{1}{2}(1-t)}\right)$$

D'autre part, les pôles nord et sud admettent pour antécédents $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement. Par conséquent π est surjective.

Enfin $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{S}^2$ étant des sous-variétés de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement et l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$,

$$(x_u, y_u, x_v, y_v) \to (2(x_u x_v + y_u y_v), 2(y_u x_v - x_u y_v), (x_u x_u^2 + y_u^2 - x_v^2 - y_v^2))$$

étant polynomiale donc C^∞, sa restriction π est aussi de classe C^∞.

b) $\pi^{-1}(U)$ étant l'ensemble des (u,v) de $\mathbb{S}^3$ tels que $v \neq 0$, φ est bien définie.

On déduit ensuite de (1) que pour tout $b \in U$, φ se restreint en une bijection de $\pi^{-1}(\{b\})$ sur $\{b\} \times \mathbb{S}^1$. En effet si deux couples (u, v) et (u', v') de $\pi^{-1}(\{b\})$ ont même image par φ, alors

$$(u', v') = e^{i\theta}(u, v)$$

d'après (1) et $v'/|v| = v/|v|$ implique que $e^{i\theta} = 1$ et donc $(u, v) = (u', v')$, ce qui montre l'injectivité. Montrons à présent que pour tout $z \in \mathbb{S}^1$, (b, z) admet un antécédent par φ. π étant surjective, il existe $(u, v) \in \mathbb{S}^3$ tel que $\pi(u, v) = b$. Alors

$$(u', v') = \frac{z\bar{v}}{|v|}(u, v)$$

appartient aussi à $\pi^{-1}(\{b\})$ et de plus $\varphi(u', v') = (b, z)$.

Il est alors immédiat de vérifier que φ est elle-même une bijection. Enfin φ est de classe C^∞ car ses deux applications coordonnées $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ et

$$\pi^{-1}(U) \to \mathbb{S}, \quad (u, v) \to v/|v|$$

le sont. On vérifie que l'inverse de φ est

$$((w, t), z) \in U \times \mathbb{S}^1 \to \Big(\frac{w\bar{z}}{\sqrt{2(1-t)}}, \frac{z\sqrt{1-t}}{\sqrt{2}}\Big)$$

et l'on en déduit qu'il est C^∞.

On peut trivialiser au dessus de $V = \mathbb{S} \setminus \{(0, -1)\}$ par

$$\pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{S}^1, \qquad (u, v) \to (\pi(u, v), u/|u|).$$

Et l'on vérifie comme précédemment que cette application est un difféomorphisme qui envoie la fibre $\pi^{-1}(\{b\})$ sur $\{b\} \times \mathbb{S}^1$.

c) Les courbes intégrales de X sont les solutions du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x_u'(t) = -y_u(t) \\ y_u'(t) = x_u(t) \\ x_v'(t) = -y_v(t) \\ y_v'(t) = x_v(t) \end{cases}$$

Pour tout $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$, on vérifie immédiatement que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$

$$(x_u(t) + iy_u(t), x_v(t) + iy_v(t)) = e^{it}(u_0, v_0)$$

est l'arc intégral maximal (car défini sur $\mathbb{R}$) d'origine (u_0, v_0).

d) Pour que la restriction de f à $\mathbb{S}^3$ se factorise en $g \circ \pi$, il faut et il suffit que f soit constante sur les fibres de π. D'après l'équation (1), ces fibres sont des trajectoires (images des courbes intégrales maximales) de X. Or la condition $D_X f = 0$ implique que f est constante sur les trajectoires. En effet, si $(\mathbb{R}, \xi)$ est une courbe intégrale de X et donc $\xi'(t) = X(\xi(t))$, nous avons

$$\frac{d}{dt} f(\xi(t)) = df_{\xi(t)}(\xi'(t)) = df_{\xi(t)}(X(\xi(t))) = (D_X f)(\xi(t)) = 0.$$

Il reste à vérifier que la fonction g obtenue est bien de classe C^∞. On montre que sa restriction à l'ouvert U de $\mathbb{S}^2$ l'est en remarquant que

$$g(b) = f \circ \varphi^{-1}(b, 1), \qquad \forall b \in U$$

En raisonnant de même avec une trivialisation de π au dessus de la sphère privée du pôle sud, on conclut que g est aussi C^∞ en le pôle nord.