Correction du contrôle du 6 Mars 2008

Corrigé 1 (*le plongement de Veronese*)**.**

1) Tout d'abord, si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors $(x^2, xy, y^2) \neq (0, 0, 0)$. De plus pour tout réel λ non-nul,

$$[(\lambda x)^2 : (\lambda x)(\lambda y) : (\lambda y)^2] = [x^2 : xy : y^2],$$

donc $[x^2 : xy : y^2]$ ne dépend que de $[x : y]$. f est bien définie.

Supposons que $f([x : y]) = f([x' : y'])$. Alors pour un certain $\lambda \neq 0$, on a

$$x^2 = \lambda(x')^2, \qquad xy = \lambda x'y', \qquad y^2 = \lambda(y')^2.$$

Nécessairement λ est strictement positif. On a $x = \epsilon_x\sqrt{\lambda}x'$ et $y = \epsilon_y\sqrt{\lambda}y'$ avec ϵ_x, ϵ_y égaux à ± 1. Si $x = 0$, alors $(x, y) = \epsilon_y\sqrt{\lambda}(x', y')$ donc $[x : y] = [x' : y']$. On conclut de même pour $y = 0$. Dans le cas où x et y sont non-nuls, l'équation $xy = \lambda x'y'$ implique que $\epsilon_x = \epsilon_y$, et donc à nouveau $[x : y] = [x' : y']$.

2) Montrons que le noyau de l'application linéaire tangente à p en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est la droite vectorielle engendrée par $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Supposons $\bar{x}$ non-nul de sorte que $[\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$ appartient au domaine de la carte

$$\varphi : \mathbb{P}^2 \setminus \{[0 : y : z]\} \to \mathbb{R}^2, \qquad [x : y : z] \to (y/x, z/x)$$

φ étant un difféomorphisme, le noyau de $T_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}p$ coincide avec le noyau de $T_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\varphi \circ p$. Or

$$T_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\varphi \circ p(x, y, z) = \frac{1}{\bar{x}^2}(\bar{x}y - x\bar{y}, \bar{x}z - x\bar{z})$$

Donc (x, y, z) est dans le noyau ssi $(x, y, z) = \frac{x}{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. On raisonne de la même façon si $\bar{y} \neq 0$ ou $\bar{z} \neq 0$.

Une autre façon plus élégante de raisonner est de factoriser la projection p en $p = \pi \circ q$, où π et la projection de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{P}^2$ et q l'application de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{S}^2$ donnée par

$$q(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

π étant un difféomorphisme local, il suffit de montrer que le noyau de l'application linéaire tangente à q en (x, y, z) est la droite engendrée par (x, y, z). Pour ce faire on utilise que l'application

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad (x, y, z), \lambda \to \lambda(x, y, z)$$

est un difféomorphisme. On peut donc identifier $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$. L'application q devient alors la projection de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{S}^2$ et on conclut facilement.

Ceci étant, l'application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ qui envoie (x, y) sur $[x^2 : xy : z^2]$ est la composée de p avec j où j est l'application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^3$

$$j(x, y) = (x^2, xy, y^2)$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{S}^1$. L'espace tangent en (x, y) à $\mathbb{S}^1$ est la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(-y, x)$. L'image de ce vecteur par l'application linéaire tangente à j est

$$T_{(x,y)}j(-y, x) = (-2xy, x^2 - y^2, 2yx)$$

Il est facile de voir que ce vecteur n'est jamais colinéaire avec (x^2, xy, y^2). Donc $T_{(x,y)}p \circ j(-y, x) \neq 0$, et cela suffit pour conclure que $p \circ j$ est immersive.

3) Soit g l'application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ dont on a montré à la question précédente qu'elle est injective. On a $g = f \circ \pi$ où π désigne maintenant la projection de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{P}^1$. L'application π étant surjective et un difféomorphisme local, f immersive équivaut à g immersive.

Donc f est une immersion injective. Pour montrer que c'est un plongement, il suffit de montrer qu'elle est fermée. C'est le cas car $\mathbb{P}^1$ est un espace topologique compact.

4) Considérons la carte de $\mathbb{P}^1$

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\} \to \mathbb{R}, \quad [x : y] \to y/x$$

et la carte de $\mathbb{P}^2$

$$\varphi' : \mathbb{P}^2 \setminus \{[0 : x : y]\} \to \mathbb{R}^2, \quad [x : y : z] \to (y/x, z/x)$$

Comme $f(\mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\})$ est inclu dans le domaine de définition de φ' on peut former l'application $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$. On a

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(y) = (y, y^2)$$

Cette application est clairement une immersion, donc f est une immersion au dessus de $\mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\}$. On raisonne de même sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{[1 : 0]\}$.

Corrigé 2.

1) Un simple calcul.

2) Il suffit de montrer que P est une submersion au dessus de a. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que $P(x) = a$. D'après la question précédente,

$$T_x P(x) = pP(x) = pa \neq 0$$

et donc T_xP est surjective.

3) Soit λ le réel positif tel que $\lambda^p = b/a$. L'homothétie de $\mathbb{R}^n$ de rapport λ se restreint en une bijection φ de $P^{-1}(a)$ sur $P^{-1}(b)$. φ est de classe C^∞ car c'est la restriction d'une application C^∞ à des sous variétés. La réciproque de φ est C^∞ pour la même raison.

4) Si a et b n'ont pas même signe et p est impair, alors $P^{-1}(a)$ et $P^{-1}(b)$ sont difféomorphes. Cela se démontre comme dans la question précédente en considérant l'homothétie de rapport $-\lambda$ où λ est le réel positif tel que $\lambda^p = |a/b|$.

Si par contre p est pair, il se peut que $P^{-1}(a)$ et $P^{-1}(b)$ ne soient pas difféomorphes. Par exemple pour

$$P(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2$$

$P^{-1}(a)$ est la réunion de deux hyperplans si $a > 0$ et vide si $a < 0$.