Correction du contrôle du 3 Avril 2009

Corrigé 1.1.

a) La différentielle de f ne s'annule en aucun point de $f^{-1}(1)$, autrement dit f est une submersion au dessus de 1. Cela implique que $X = f^{-1}(1)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.

Soit $\rho = \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}$. Les applications de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \to (\frac{x_1}{\rho}, \frac{x_2}{\rho}, y_1, y_2), \qquad (x_1, x_2, y_1, y_2) \to (\rho x_1, \rho x_2, y_1, y_2)$$

sont de classe C^∞, inverses l'une de l'autre et elles mettent en bijection X et $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. Du fait que la restriction d'une application C^∞ à une sous-variété est C^∞ et que $\mathbb{S}^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, on déduit que X et $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ sont difféomorphes.

b) $[A, B] = -x_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$.

c) Les courbes intégrales de A sont les solutions $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ du système d'équations

$$x_1'(t) = -x_2(t), \quad x_2'(t) = x_1(t), \quad y_1'(t) = 0, \quad y_2'(t) = 0.$$

Elles sont données par

$$x_1(t) = x_1(0)\cos t - x_2(0)\sin t, \quad x_2(t) = x_1(0)\sin t + x_2(0)\cos t$$
$$y_1(t) = y_1(0), \quad y_2(t) = y_2(0)$$

Le flot au temps t est donc une rotation d'angle t dans le plan x_1, x_2.

d) Par définition $u'(t) = \xi(u(t))$ et donc

$$\frac{d}{dt} f(u(t)) = (T_{u(t)} f)(u'(t)) = (T_{u(t)} f)(\xi(u(t))) = D_\xi f(u(t)) = 0$$

car $D_\xi f = 0$. Par conséquent $t \to f(u(t))$ est constante.

e) Un simple calcul montre que $D_A f = 0$ et $D_B f = 0$. Donc pour tout $p \in \mathbb{R}^4$, $A(p)$ et $B(p)$ sont dans le noyau de $T_p f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Comme pour tout $p \in X$, $T_p X = \ker T_p f$, les champs A et B définissent par restriction des champs de vecteurs $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ de X. Ils sont bien lisses car X et TX sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^4$ et $T\mathbb{R}^4$ respectivement.

Une courbe (I, u) de X est une courbe intégrale de A ssi c'est une courbe intégral de $\tilde{A}$. De plus d'après la question précédente tout arc intégral de

A d'origine un point de X est inclu dans X. Donc le flot de $\tilde{A}$ s'obtient en restreignant le flot de A à X.

f) $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ car c'est l'image réciproque de $\{1\}$ par l'application déterminant qui est une submersion au dessus de 1. Les deux applications

$$(x_1,x_2,y_1,y_2) \to \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ y_2-x_2 & x_1-y_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{1}{2}(a+d,b-c,a-d,b+c)$$

sont inverses l'une de l'autres, de classe C^∞. Comme

$$\det \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ y_2-x_2 & x_1-y_1 \end{pmatrix} = f(x_1,x_2,y_1,y_2)$$

elles induisent par restriction un difféomorphisme entre X et $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$.

g) Si M est la matrice de coefficients a, b, c et d, l'on a

$$\varphi^{-1}(H(t)MH(t)) = \frac{1}{2}(ae^t+de^{-t},b-c,ae^t-de^{-t},b+c)$$

En dérivant on constate que c'est une courbe intégrale de B, et donc de $\tilde{B}$.