Correction du contrôle du 19 Octobre 2009

Exercice 1 (*Applications rationnelles et droite projective)***.**

a) Rappeler comment sont définies les deux cartes usuelles de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Montrer que la projection de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ qui envoie (x, y) sur $[x : y]$ est de classe C^∞.

b) Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels n'ayant aucune racine réelle en commun. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans la droite projective définie par

$$f(x) = \begin{cases} [P(x)/Q(x) : 1] \text{ si } Q(x) \neq 0 \\ [1 : 0] \text{ sinon} \end{cases}$$

est de classe C^∞.

c) Montrer que l'application g de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[1 : 0]\}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ définie par

$$g([x : 1]) = f(x)$$

se prolonge en une application C^∞ de la droite projective dans elle-même.

Corrigé 1.

a) Les domaines de définition des cartes sont les ouverts $U_1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[0 : 1]\}$ et $U_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{[1 : 0]\}$. Les applications de carte sont $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ données par

$$\varphi_1([x : y]) = y/x, \qquad \varphi_2([x : y]) = x/y$$

Pour montrer que la projection π de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est lisse, il suffit de montrer que pour $i = 1$ ou 2, l'application $\varphi_i \circ \pi$ est lisse de $\pi^{-1}(U_i)$ dans $\mathbb{R}$. C'est bien vrai car

$$\varphi_1 \circ \pi(x, y) = y/x, \qquad \varphi_2 \circ \pi(x, y) = x/y.$$

b) Si $Q(x)$ ne s'annule pas, $[P(x)/Q(x) : 1] = [P(x) : Q(x)]$. Si par contre $Q(x)$ s'annule, $[1 : 0] = [P(x) : Q(x)]$. Donc pour tout x

$$f(x) = [P(x) : Q(x)] = \pi((P(x), Q(x)))$$

f est alors lisse comme composée d'applications lisses.

c) U_1 étant un voisinage de $[1 : 0]$ et $\varphi_1([1 : 0]) = 0$, l'application g se prolonge en une application lisse si et seulement si l'application $g \circ \varphi_1^{-1}$:

$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ se prolonge en une application lisse de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Or si $x \neq 0$,

$$\varphi_1^{-1}(x) = [1 : x] = [1/x : 1]$$

donc d'après la question précédente

$$g \circ \varphi_1^{-1}(x) = [P(1/x) : Q(1/x)] = [x^n P(1/x) : x^n Q(1/x)]$$

pour tout entier n. Si n est le maximum des degrés de P et Q, les fonctions $R(x) = x^n P(1/x)$ et $S(x) = x^n Q(1/x)$ sont polynomiales en x et $(R(0), S(0)) \neq (0, 0)$. Donc par le même argument qu'au *b)*,

$$g \circ \varphi_1^{-1}(x) = [R(x) : S(x)]$$

se prolonge à l'origine en une fonction lisse.

Exercice 2 (*Un plongement de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}^4$)**.**

a) Montrer que l'application f de la sphère $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^6$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy)$$

est une application C^∞ immersive.

b) Montrer que f se factorise en un plongement g du plan projectif dans $\mathbb{R}^6$.

c) Montrer que l'image de g est incluse dans l'intersection de l'hyperplan affine $H = \{(a, b, c, d, e, f,) \in \mathbb{R}^6 / a + b + c = 1\}$ avec la sphère $\mathbb{S}^5$.

d) Montrer que $H \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$ difféomorphe à la sphère de dimension 4.

e) En déduire l'existence d'un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^4$.

Corrigé 2.

a) L'application $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^6$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy)$$

est immersive (pour le voir, on montre que sa matrice jacobienne est de rang 3, cela se voit facilement en discutant selon que 0, 1 ou 2 des coordonnées x, y, z s'annulent). La sphère étant une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, la restriction f de $\tilde{f}$ à $\mathbb{S}^2$ est lisse et son application linéaire tangente en (x, y, z) est la restriction de l'application linéaire tangente à $\tilde{f}$ en (x, y, z) à l'espace tangent à la sphère en (x, y, z). $T_{(x,y,z)}\tilde{f}$ est injective implique alors que $T_{(x,y,z)}f$ l'est aussi.

b) Comme $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$, f se factorise en $g \circ \pi$ où π est la projection de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et g une application de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^6$.

Montrons que g est injective. $f(x,y,z) = f(z',y',z')$ implique $x = \epsilon_x x'$, $y = \epsilon_y y'$ et $z = \epsilon_z z'$ avec ϵ_x, ϵ_y et ϵ_z égaux à ± 1. De $xz = x'z'$, l'on tire $\epsilon_z = \epsilon_x$ et de $xy = x'y'$, $\epsilon_y = \epsilon_x$. Donc $[x:y:z] = [x':y':z']$.

Comme π est un difféomorphisme local, il admet un inverse local lisse au voisinage de tout point. La lissité de $f = g \circ \pi$ implique alors celle de g. Comme la différentielle de π est inversible en tout point et que f est une immersion, g est aussi une immersion.

Enfin g est continue injective et le plan projectif est compact, donc g est un homéomorphisme sur son image.

c) La somme des trois premières coordonnées de $f(x,y,z)$ est égale à 1, car (x,y,z) appartient à la sphère. Calculons la somme des carrés des coordonnées de $f(x,y,z)$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 2x^2y^2 =& (x^2+y^2+z^2)^2 \\ =& 1 \end{aligned}$$

car à nouveau (x,y,z) appartient à la sphère.

d) Pour montrer que $H \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$, il suffit de montrer que l'application de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie (a,b,c,d,e,f) sur $(a+b+c, a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$ est une submersion au dessus de $(1,1)$. La matrice jacobienne de cette application est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & 2b & 2c & 2d & 2e & 2f \end{pmatrix}$$

La matrice est de rang 2 ou 1. Précisément elle est de rang 1 ssi $a = b = c$ et $d = e = f = 0$. Cela ne se produit pas lorsque $(a,b,c,d,e,f) \in H \cap \mathbb{S}^5$.

Montrons que cette sous-variété est difféomorphe à la sphère. Soit H_0 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ d'équation $a+b+c = 0$ et u le vecteur de coordonnées $(1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0)$. Remarquons que tout vecteur de H est de la forme $u + v$ avec $v \in H_0$ et comme u est orthogonal à H_0,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 1/3 + \|v\|^2$$

Donc $H \cap \mathbb{S}^5$ est l'image de l'application h de la sphère unité de H_0 dans $\mathbb{R}^6$ qui envoie v sur $u + \sqrt{2/3}\, v$. Cette application est injective. De plus c'est une immersion lisse comme restriction à la sphère unité de H_0 d'une application affine injective. En restreignant l'espace d'arrivée à la sous-variété $H \cap \mathbb{S}^5$, on obtient une immersion bijective entre deux variétés de même dimension, c'est à dire un difféomorphisme.

On peut aussi adapter cet argument pour montrer que $H \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$, ce qui évite le préliminaire. Il suffit de dire que h est un homéomorphisme sur son image car continue injective et la sphère de H_0 est compacte. De plus h est une immersion, c'est alors un plongement.

e) Nous avons obtenu dans les questions précédentes un plongement du plan projectif dans $\mathbb{R}^6$ dont l'image est incluse dans une sous-variété difféomorphe à une sphère de dimension 4. Cela nous donne un plongement du plan projectif dans la sphère de dimension 4. Le plan projectif étant de dimension 2, ce plongement n'est pas surjectif. La sphère de dimension 4 privée d'un point est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$. En enlevant un point qui n'est pas dans l'image, on obtient un plongement du plan projectif dans $\mathbb{R}^4$.