Correction du contrôle du 30 novembre 2007

Corrigé 1 (*Dérivée de Lie*)**.**

a) Les solutions de $u' = u - \alpha$ sont les fonctions

$$u_C(t) = \alpha + Ce^t$$

où C décrit $\mathbb{R}$.

b) Les courbes intégrales de X_a sont les courbes $t \to (u_1(t), \dots, u_n(t))$ de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t) - a_1 \\ \dots \\ u_n'(t) = u_n(t) - a_n \end{cases}$$

Ces équations sont indépendantes et leur solution est donnée au *a)*. Ainsi les courbes intégrales maximales sont

$$u(t) = a + (u(0) - a)e^t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Les autres courbes intégrales s'obtiennent en restreignant celles-ci à un intervalle de $\mathbb{R}$. Le flot au temps t est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$$\Phi_{a,t}(x) = a + (x - a)e^t$$

On reconnait l'homothétie de centre a de rapport e^t.

c) Le crochet de Lie est donné par

$$\begin{aligned} [X_a, X_b] &= \sum_i \mathcal{L}_{X_a}(x_i - b_i)\frac{\partial}{\partial x_i} - \mathcal{L}_{X_b}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_i (x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i} - (x_i - b_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_i (b_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

d) L'application linéaire tangente à $\Phi_{a,t}$ en x est l'homothétie de rapport e^t. Le champs X_b est la fonction $x \to (x, x - b)$. Donc

$$Z(x,t) = (x, e^{-t}(\Phi_{a,t}(x) - b)) = (x, e^{-t}(a - b) + (x - a))$$

En dérivant par rapport à t en $t = 0$, on obtient le champ constant $x \to (x, b - a)$. On retrouve $[X_a, X_b]$.

Corrigé 2 (*Sous-période*)**.**

a) Si (I, u) est une courbe intégrale de X, l'on a $u'(t) = X(u(t))$ pour tout $t \in I$. Donc

$$(p \circ u)'(t) = (T_{u(t)}p)(X(u(t))) = Y(u(t))$$

autrement dit $(I, p \circ u)$ est une courbe intégrale de Y.

b) A supposer qu'il existe, Y est unique car p est surjective. Montrons que $p(x) = p(x')$ implique que

$$(T_x p)(X(x)) = (T_{x'}p)(X(x')).$$

Si $p(x) = p(x')$, alors $x' = \theta_n(x)$ pour un certain n. Un calcul immédiat montre que $(T_x\theta_n)(X(x)) = X(x')$. Enfin $p \circ \theta_n = p$ entraine que $(T_{x'}p) \circ (T_x\theta_n) = T_x p$. Par conséquent

$$(T_x p)(X(x)) = (T_{x'}p)((T_x\theta_n)(X(x))) = (T_{x'}p)(X(x')).$$

Donc l'application Z de $\mathbb{R}^2$ dans TM qui envoie x dans $(T_x p)(X(x))$ se factorise en $Y \circ p$. L'application Z est lisse car c'est la composée du champ $X : \mathbb{R}^2 \to T\mathbb{R}^2$ par l'application linéaire tangente $Tp : T\mathbb{R}^2 \to TM$. Comme p est un difféomorphisme local, $Z = Y \circ p$ entraine que Y est lisse.

c) L'arc intégral d'origine $x \in \mathbb{R}^2$ de X est $(\mathbb{R}, t \to x + (t, 0))$. D'après le *a*), $(\mathbb{R}, t \to p(x + (t, 0)))$ est un arc intégral de Y d'origine $p(x)$. Il est maximal car défini sur $\mathbb{R}$. Si la deuxième coordonnée de x s'annule, il est périodique de période 1. Sinon il est périodique de période 2.

Exercice supplémentaire

Exercice 1. On note M(2) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit S la partie de M(2) formée des matrices de rang 1 et

$$E = \{(M, Z) \in S \times \mathbb{R}^2 / \ Z \in \ker M\}.$$

On note p l'application de E dans S qui au couple (M, Z) associe M.

a) Montrer qu'une matrice de M(2) est de rang 1 ssi elle n'est pas nulle et son déterminant est nul. En déduire que S est une sous-variété de M(2).

b) Vérifier que les applications s_1 et s_2 de S dans E données par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right)$$

et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \right)$$

sont des sections de $p : E \to S$. En déduire que (E, S, p) est un fibré vectoriel de rang 1.

c) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, montrer que

$$\varphi(x, y) := \left(\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

appartient à E. En déduire que (E, S, p) n'est pas isomorphe au fibré trivial (appliquer un argument de connexité).

Corrigé 3.

a) Si une matrice est non nulle son rang est $\geqslant 1$. Si elle est d'ordre 2 et son déterminant est nul, son rang est < 2. L'application déterminant restreinte à $\mathrm{M}(2) \setminus \{0_{\mathrm{M}(2)}\}$ est une submersion. S étant l'image réciproque de 0, c'est une sous-variété de $\mathrm{M}(2)$.

b) On constate que $s_1(M)$ et $s_2(M)$ appartiennent au noyau de M. De plus pour toute matrice M de rang 1, $s_1(M)$ ou $s_2(M)$ ne s'annule pas et par conséquent engendre la droite E_M. Comme s_1 et s_2 sont des sections lisses de $S \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ceci montre que (E, S, p) est un sous-fibré du fibré trivial $S \times \mathbb{R}^2$.

c) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : E \to S \times \mathbb{R}$ de fibrés de base S. Notons π la projection $S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ étant connexe, l'image C de $\pi \circ f \circ \varphi$ est connexe. Or

$$\pi \circ f \circ \varphi(x, y) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

et $\pi \circ f \circ \varphi(1, 0) = -\pi \circ f \circ \varphi(-1, 0)$. Par conséquent C est réunion des deux parties ouvertes disjointes non vides $C \cap]-\infty, 0[$ et $C \cap]0, \infty[$. Il ne peut être connexe.