Examen de géométrie différentielle du 19 Décembre 2012

Aucun document n'est autorisé, à l'exception des notes de cours manuscrites. En particulier, les corrections d'exercices et les polycopiés de cours sont interdits. Les calculatrices sont aussi interdites.

Exercice 1. On note x, y et z les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^3$. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et $j : S \to \mathbb{R}^3$ l'injection canonique.

a) Donner une base de T_pS pour tout $p \in S$.

b) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $g = f \circ j$. Soit $p \in S$. A quelle condition p est-il un point critique de f ? un point critique de g ?

c) Dorénavant $f = xy$. Donner les points critiques de g. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de g ?

d) Représenter les ensembles de niveau de g dans l'hémisphère nord $S \cap \{z \geqslant 0\}$ et dans l'hémisphère sud $S \cap \{z \leqslant 0\}$.

e) Donner le nombre de composantes connexes de $g^{-1}(c)$ en fonction de $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit M une variété. Soient $X, Y \in \Gamma(M, TM)$ deux champs de vecteurs et $\alpha \in \Omega^1(M)$ une forme différentielle de degré 1.

a) Montrer que

$$\mathcal{L}_X(\alpha(Y)) = (\mathcal{L}_X\alpha)(Y) + \alpha([X, Y]).$$

b) En déduire que

$$d\alpha(X, Y) = \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

c) On suppose que M est de dimension 2 et que X et Y forment un repère du fibré tangent de M. Soient $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ telles que pour tout $p \in M$, $(\alpha|_p, \beta|_p)$ est la base de T_p^*M duale de la base $(X|_p, Y|_p)$ de T_pM. Soient f, $g \in C^\infty(M)$ telles que $[X, Y] = fX + gY$. Montrer que

$$d\alpha = -f\alpha \wedge \beta, \qquad d\beta = -g\alpha \wedge \beta.$$

d) On suppose M de dimension n. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ un repère du fibré tangent de M et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ le repère dual du fibré cotangent, c'est à dire que pour tout $p \in M$, $(\alpha_1|_p, \ldots, \alpha_n|_p)$ est la base duale de $(X_1|_p, \ldots, X_n|_p)$. Définissons les fonctions c_{ij}^k par les égalités $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$. Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$d\alpha_k = \sum_{i<j} -c_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j.$$

Exercice 3. Soit M une variété de dimension $n \geqslant 1$. Soit p un point de M. Soit j l'injection canonique de $M \setminus \{p\}$ dans M.

a) Montrer que p admet un voisinage B homéomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Calculer la dimension des espaces de cohomologie de $B \setminus \{p\}$.

b) Montrer que si $n \geqslant 2$, l'application $j^* : H^0(M) \to H^0(M \setminus \{p\})$ est un isomorphisme. Pour $n = 1$, j^* est-elle injective, surjective ?

c) En appliquant le théorème de Mayer-Vietoris au recouvrement $(M \setminus \{p\}, B)$ de M, montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-2$, l'application

$$j^* : H^k(M) \to H^k(M \setminus \{p\}).$$

est un isomorphisme. On traitera avec attention le cas $k = 1$.

d) Montrer que $j^* : H^k(M) \to H^k(M \setminus \{p\})$ n'est pas nécessairement un isomorphisme lorsque $k = n-1$ ou n.