Contrôle de géométrie différentielle du 6 Mars 2008

Exercice 1 (*Question de cours).* Soient X et Y deux variétés différentielles et $f : X \to Y$ un morphisme.

1) Rappeler la définition des points critiques de f.

2) Enoncer (sans démonstration) le théorème de Sard.

3) Que peut-on dire si X est de dimension n et Y de dimension m avec $n < m$?

Exercice 2 (*le plongement de Veronese).* Pour tout entier n, on note $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif réel de dimension n et $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. On rappelle que la projection de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{P}^n$ est un difféomorphime local.

Soit f l'application de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ qui envoie le point de coordonnées homogène $[x : y]$ sur le point de coordonnées homogènes $[x^2 : xy : y^2]$.

1) Montrer que f est bien définie et qu'elle est injective.

2) Soit p la projection canonique de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sur le plan projectif $\mathbb{P}^2$. Donner le noyau de son application linéaire tangente en chaque point. En déduire que l'application de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ qui envoie (x, y) sur $[x^2 : xy : y^2]$ est une immersion.

3) Déduire de la question précédente que f est une immersion, puis un plongement.

4) Donner une autre preuve du fait que f soit une immersion en utilisant les cartes des espaces projectifs.

Exercice 3. Soient n et p deux entiers positifs. Soit P une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ polynomiale homogène de degré p, c'est à dire que

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \alpha(1)+\ldots+\alpha(n)=p} c_\alpha x_1^{\alpha(1)} \ldots x_n^{\alpha(n)}$$

avec des coefficients c_α réels.

1) Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = pP.$$

2) Soit a un réel non-nul. Montrer que $P^{-1}(a)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

3) Montrer que si a et b sont deux réels non-nuls de même signe, $P^{-1}(a)$ et $P^{-1}(b)$ sont difféomorphes.

4) Que peut-on dire si a et b n'ont pas même signe ?