Contrôle de géométrie différentielle du 3 Avril 2009

Exercice 1 (*Question de cours).* Donner la définition d'un fibré vectoriel.

Exercice 2. On notera (x_1, x_2, y_1, y_2) les coordonnées de $\mathbb{R}^4$. Soient A et B les champs de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$A = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad B = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2^2.$$

a) Montrer que $f^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ et qu'elle est difféomorphe au produit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. On notera X cette variété.

b) Calculer le crochet de Lie de A et B.

c) Donner le flot de A.

d) Soit ξ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tel que $D_\xi f = 0$. Soit (I, u) un arc intégral de ξ d'origine un point de X. Montrer que pour tout $t \in I$, $u(t) \in X$.

e) Montrer que les champs A et B définissent par restriction des champs de vecteurs de X. On les notera $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$. Donner le flot de $\tilde{A}$.

f) On note $\mathrm{M}(2, R)$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients réels. Montrer que $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}(2, \mathbb{R}) / \ \det M = 1\}$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(2, R)$. Montrer que l'application

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \to \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ y_2 - x_2 & x_1 - y_1 \end{pmatrix}$$

induit un difféomorphisme φ de X dans $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$.

g) On note $H(t)$ la matrice

$$H(t) = \begin{pmatrix} \exp(t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-t/2) \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout $M \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}$ dans X qui envoie t sur $\varphi^{-1}(H(t)MH(t))$ est une courbe intégrale de $\tilde{B}$.