Contrôle de géométrie différentielle du 30 novembre 2007

Exercice 1 (*Question de cours)*. Enoncer les théorèmes d'existence et unicité de Cauchy.

Exercice 2 (*Dérivée de Lie)*. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on considère le champ de vecteurs X_a de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$X_a = \sum_{i=1}^{n} (x^i - a^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $u'(t) = u(t) - \alpha$ où u est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Donner les courbes intégrales de X_a et son flot $\Phi_{a,t}$ au temps t.

c) Calculer le crochet de Lie $[X_a, X_b]$ où $a, b \in \mathbb{R}^n$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, calculer

$$Z(x,t) = (T_x \Phi_{a,t})^{-1} (X_b(\Phi_{a,t}(x)))$$

puis la dérivée de $Z(x,t)$ par rapport à t en $t = 0$. Comparer avec la question précédente.

Exercice 3 (*Sous-période)*. On rappelle que le ruban de Moebius M est le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{Z}$ agit par

$$\theta_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \theta_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, (-1)^n x_2).$$

M admet une structure de variété qui fait de la projection canonique $p : \mathbb{R}^2 \to M$ un difféomorphisme local.

a) Soient deux champs de vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^2$ et M respectivement tels que

$$(T_x p)(X(x)) = Y(p(x)), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Montrer que si (I, u) est une courbe intégrale de X, alors $(I, p \circ u)$ est une courbe intégrale de Y.

b) Soit X le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial x_1}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique champ Y de M tel que (1) soit vérifiée. Pourquoi Y est-il de classe C^∞ ?

c) Pour tout $y \in M$, donner l'arc intégral maximal d'origine y du champ Y. Montrer qu'il est périodique et donner sa période.