LA FILTRATION DE HARDER-NARASIMHAN DES SCHÉMAS EN GROUPES FINIS ET PLATS

LAURENT FARGUES

Résumé. Dans cet article nous définissons et étudions une filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats sur un anneau de valuation d'inégales caractéristiques. Nous étudions également ce type de filtrations pour des familles de schémas en groupes finis et plats paramétrées par des schémas formels.

Résumé. In this article we define and study a Harder-Narasimhan filtration of finite flat group schemes over an unequal characteristic valuation ring. We also study those type of filtrations for families of finite flat group schemes parametrised by formal schemes.

Introduction

Si X est une courbe projective lisse sur un corps, Harder et Narasimhan ont défini dans [15] une filtration des fibrés vectoriels sur X. La catégorie $\mathcal{C}$ des fibrés vectoriels sur X est une catégorie exacte munie de deux fonctions additives sur les suites exactes

$$\mathrm{rg}, \deg : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

(rang et degré). Elle n'est pas abélienne mais vérifie tout de même les propriétés suivantes :

- Soit η le point générique de la courbe. Les germes de fibrés sur des ouverts non vides de X forment une catégorie abélienne $\mathcal{C}_\eta$, la catégorie des $\mathcal{O}_{X,\eta}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Il y a un foncteur fibre générique $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_\eta$
- Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X, il y a un foncteur d'adhérence schématique des sous-fibrés de $\mathcal{E}_\eta$ vers ceux de $\mathcal{E}$ et les deux foncteurs précédents induisent des bijections inverses

$$\{\text{Sous-fibrés de } \mathcal{E}\} \rightleftarrows \{\text{Sous-fibrés de } \mathcal{E}_\eta\}.$$

- La fonction degré croit par modifications. Plus précisément, si $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ est un morphisme de fibrés qui est un isomorphisme en fibre générique alors

$$\deg \mathcal{E}' \geq \deg \mathcal{E}$$

et il y a égalité si et seulement si $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

Toutes ces propriétés suffisent pour définir la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré en utilisant la fonction

$$\mu = \frac{\deg}{\mathrm{rg}}.$$

Soit maintenant p un nombre premier et K un corps valué de caractéristique 0 pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ étendant la valuation p-adique. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des schémas en groupes commutatifs finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ d'ordre une puissance de p. Nous démontrons dans cet article que c'est une catégorie satisfaisant à des propriétés strictement analogues à celle des fibrés vectoriels sur une courbe. Plus précisément, c'est une catégorie exacte munie de deux fonctions additives

$$\mathrm{ht}, \deg : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14L05, 14G22.

La fonction ht est la hauteur ; si $G \in \mathcal{C}$ alors $|G| = p^{\mathrm{ht}\, G}$. On peut définir la fonction degré, deg, de la façon suivante : soit G fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ et $f : A \longrightarrow B$ une isogénie de schémas abéliens (ou bien de groupes p-divisibles) sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ de noyau G. On pose alors

$$\deg(G) = v(\det f^*) \text{ où } f^* : \omega_B \longrightarrow \omega_A.$$

en d'autres termes si le faisceau conormal ω_G s'écrit

$$\omega_G \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_K / a_i \mathcal{O}_K$$

alors

$$\deg(G) = \sum_{i \in I} v(a_i).$$

Il s'agit du « discriminant »du schéma en groupes G. On a alors les propriétés suivantes :

- Soit $\eta = \mathrm{Spec}(K)$. Les schémas en groupes finis commutatifs sur K annulés par une puissance de p forment une catégorie abélienne $\mathcal{C}_\eta$.
- Il y a un foncteur fibre générique $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_\eta$.
- Si G est un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$, il y a un foncteur d'adhérence schématique des sous-groupes de G_η vers ceux de G et les deux foncteurs précédents induisent des bijections inverses

$$\{\text{Sous-groupes finis et plats de } G\} \rightleftarrows \{\text{Sous-groupes de } G_\eta\}.$$

- Si $G \longrightarrow G'$ est un morphisme de schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ induisant un isomorphisme en fibre générique alors

$$\deg G' \geq \deg G$$

est c'est un isomorphisme si et seulement si $\deg G = \deg G'$.

Seule la dernière propriété n'est pas complètement évidente. On la démontre dans un cadre plus général dans la proposition 2 de l'article. Au final, elle repose de façon cruciale sur le fait que les algèbres associées aux groupes finis et plats sont syntomiques. La preuve n'est pas très difficile, mais c'est lorsque l'auteur s'est rendu compte qu'une telle formule était vraie qu'il a compris que l'on pouvait développer une théorie du type Harder-Narasimhan pour les schémas en groupes finis et plats. Les sections 1 et 2 de l'article sont consacrées à cette fonction degré pour des bases plus générales qu'un anneau de valuation, la fonctions degré prenant alors ses valeurs dans le groupe des diviseurs de Cartier sur la base. Dans la section 3 on spécialise ces résultats au cas de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ avec K comme précédemment. On remarquera que contrairement à la catégorie des fibrés vectoriels sur une courbe, il n'existe pas de catégorie abélienne ayant une interprétation géométrique « naturelle »contenant la catégorie exacte des groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ et munie d'une fonction additive degré étendant celle définie précédemment (dans le cas des courbes la catégorie des faisceaux cohérents forme une telle catégorie).

À partir de là, en posant

$$\mu = \frac{\deg}{\mathrm{ht}}$$

on développe une théorie analogue à celle des fibrés vectoriels pour les schémas en groupes finis et plats dans la section 4. On a une bonne notion de filtration et de polygone de Harder-Narasimhan pour un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$. La partie de pente 1 dans cette filtration correspond à la partie multiplicative du schéma en groupes et la partie de pente 0 au plus grand quotient étale. La catégorie des schémas en groupes semi-stables de pente μ fixée est abélienne, un morphisme entre de tels schémas en groupes a un noyau automatiquement plat et son noyau et son images sont semi-stables de pente μ. En particulier si G est semi-stable pour tout entier $n \geq 1$, la multiplication par p^n sur G a un noyau plat. On obtient ainsi un dévissage de la catégorie exacte des schémas en groupes finis et plats sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ par des catégories abéliennes qui interpolent le cas des schémas en groupes étales (en pente 0) et celui des groupes de type multiplicatif (pente 1).

Dans la section 5 on étudie en vue de futurs applications les filtrations de Harder-Narasimhan d'un groupe muni de structures additionnelles, polarisations et actions d'une algèbre.

Dans la section 6 on étudie ces filtrations pour les groupes dont l'algèbre est monogène, en particulier les noyaux d'isogénies de groupes formels p-divisibles de dimension 1. L'auteur a déjà étudié en détails d'autres filtrations pour de tels groupes dans [12]. Une des remarques ayant motivé l'écriture du présent article est que la condition de semi-stabilité que l'on introduit est liée dans le cas des groupes formels p-divisibles de dimension un aux domaines fondamentaux définis par Gross et Hopkins dans [13] (on renvoie au corollaire 11 pour plus de détails).

On étudie également les filtrations de Harder-Narasimhan en familles dans la section 7. Ces familles sont paramétrées par des schémas formels localement formellement de type fini sur le spectre formel d'un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques. On démontre alors des propriétés de continuité/semi-continuité des polygones de Harder-Narasimhan relativement à la topologie de l'espace de Berkovich fibre générique de la base de la famille. On donne également un critère permettant de mettre en famille des filtrations de Harder-Narasimhan, quitte à éclater la base de la famille.

La section 8 est consacrée à la démonstration du fait que le polygone de Hodge d'un groupe plat fini est au dessus de son polygone de Harder-Narasimhan. Le polygone de Hodge du groupe G est défini en termes des idéaux de Fitting de ω_G, le degré de G correspondant au 0-ième idéal de Fitting.

Dans la section 9 on étudie le lien entre l'application de Hodge-Tate d'un groupe plat fini et sa filtration de Harder-Narasimhan. On introduit pour cela un nouveau polygone lié à l'application de Hodge-Tate et on montre que celui-ci est proche du polygone de Harder-Narasimhan (théorème 6). La partie de pente 1 de ce polygone de Hodge-Tate correspond à la longueur du noyau de l'application de Hodge-Tate.

Dans la dernière section on explique que ces filtrations de Harder-Narasimhan existent également pour d'autres bases que les anneaux de valuation d'inégales caractéristiques. On retiendra par exemple que c'est le cas des anneaux d'entiers des corps de nombres. Dans ce cas là si K est un corps de nombres et A une variété abélienne sur $\mathcal{O}_K$ les propriétés des filtrations associées aux groupes $A[p^n]$ lorsque n varie sont reliées à la variation de la hauteur de Faltings dans la classe de p-isogénie de A. En utilisant ces filtrations on devrait pouvoir raffiner les résultats de Raynaud ([22]). Les résultats de la section 9 laissent espérer la possibilité de faire le lien entre les résultats de [22] et ceux de Masser et Wüstholz ([20]).

Enfin, notons que l'une des motivations principales de cet article est l'étude de ces filtrations pour les points de torsion des groupes p-divisibles. Ces filtrations devraient également être utiles pour l'étude de l'action des opérateurs de Hecke sur les espaces analytiques rigides associés aux variétés de Shimura.

1. Préliminaires sur la différente et le discriminant pour les algèbres syntomiques finies génériquement étales

Le but de cette section est de généraliser les résultats du chapitre III de [23] à des algèbres syntomiques qui ne sont pas nécessairement monogènes. Il n'y a là rien de bien nouveau, on pourra par exemple consulter l'appendice de [21] (ou l'exercice 9 du chapitre 5, page 167, de [8] dans le cas globalement intersection complète dans un espace affine). Cependant, vu le manque de références sur le sujet, on a préféré écrire en détails les résultats dont on a besoin.

1.1. **Morphismes syntomiques.** Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Rappelons que f est dit syntomique si c'est un morphisme plat de présentation finie tel que tout point de X possède un voisinage U tel qu'il existe une immersion régulière du S-schéma U dans un S-schéma lisse. Par immersion régulière on entend une immersion fermée localement définie par une suite régulière au sens de la définition 16.9.2 de [14]. Si f est syntomique alors toute immersion au dessus de S d'un ouvert de X dans un S-schéma lisse est régulière. Si f est plat de présentation finie les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est syntomique
- pour tout $s \in S$, le morphisme $f_s : X_s \longrightarrow \mathrm{Spec}(k(s))$ est syntomique

– pour tout $x \in X$, si $s = f(x)$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est quotient d'un anneau local régulier par un idéal régulier
– pour tout $x \in X$, si $s = f(x)$, l'anneau local $\widehat{\mathcal{O}}_{X_s,x}$ est quotient d'un anneau local régulier complet par un idéal régulier.

On renvoie au chapitre 19 de [14] pour ces assertions (puisque nos morphismes sont de présentation finie cela se ramène au cas noethérien en utilisant les résultats du chapitre 8 de [14]). On rappelle également que tout morphisme plat de type fini entre schémas localement noethériens réguliers est syntomique et que tout schéma en groupes plat de présentation finie l'est également.

1.2. **Discriminant.** Soit maintenant $f : X \longrightarrow S$ un morphisme syntomique fini de schémas. Supposons f étale au dessus d'un ouvert schématiquement dense de X (lorsque X est noethérien cela signifie que f est étale aux points génériques de toutes les composantes irréductibles et immergées de X). Soit

$$\mathbb{L}_{X/S} \in \mathbb{D}^{[-1,0]}(\mathcal{O}_X)$$

le complexe cotangent de f. D'après la proposition 3.2.6 de [17] c'est un complexe parfait de rang nul. Cela signifie que, localement sur X, il existe un quasi-isomorphisme

$$\left[\mathcal{E}^{-1} \longrightarrow \mathcal{E}^0\right] \longrightarrow \mathbb{L}_{X/S}$$

où $\mathcal{E}^{-1}$ et $\mathcal{E}^0$ sont localement libres de rang fini et $\mathrm{rg}(\mathcal{E}^{-1}) = \mathrm{rg}(\mathcal{E}^0)$.

Définition 1. *On note $\Delta_{X/S} = \mathrm{Div}(\mathbb{L}_{X/S})$ le diviseur de Cartier de X associé, tel que défini dans le chapitre II de* [19]. *Le fibré inversible sous-jacent à $\Delta_{X/S}$ est le déterminant* $\det \mathbb{L}_{X/S}$.

Une autre définition équivalente ne faisant pas intervenir le complexe cotangent consiste à poser

$$\Delta_{X/S} = \mathrm{Fitt}_0\, \Omega^1_{X/S}$$

comme idéal inversible dans $\mathcal{O}_X$, où Fitt signifie idéal de Fitting. Le support du diviseur $\Delta_{X/S}$ est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est étale. Concrètement, localement sur S, soit

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{g} & \\ S & & \end{array}$$

une immersion fermée de X dans un S-schéma lisse Y et $\mathcal{I}$ l'idéal de X dans Y. On a

$$\mathbb{L}_{X/S} \simeq \left[\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{u} i^*\Omega^1_{Y/S}\right]$$

et

$$\det \mathbb{L}_{X/S} \simeq \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} i^* \det \Omega^1_{Y/S}.$$

Alors, $\Delta_{X/S} = (\det \mathbb{L}_{X/S}, s)$ où s est la section du fibré déterminant fournie par $\det u$.

Encore plus concrètement, localement sur S, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(A)$

$$B = A[T_1, \ldots, T_n]/I$$

et il y a un ouvert U de $\mathbb{A}^n_A$ ainsi que des sections $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_A})$ tels que

$$I_{|U} = (f_1, \ldots, f_n).$$

Alors, en tant qu'idéal inversible dans $\mathcal{O}_X$,

$$(\Delta_{X/S})_{|U\cap X} = \mathcal{O}_{U\cap X}.\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Lorsque X est intègre noethérien et normal, le diviseur de Weil associé à $\Delta_{X/S}$ est

$$\sum_{\substack{x\in X \\ \dim \mathcal{O}_{X,x}=1}} m_x[\overline{\{x\}}]$$

où pour un x comme dans la somme précédente, si $\pi_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ désigne une uniformisante, si

$$\Omega^1_{X/S,x} \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_{X,x}/\pi_x^{a_i}\mathcal{O}_{X,x}$$

alors

$$m_x = \sum_{i\in I} a_i.$$

1.3. **Différente.** On travaille désormais avec des schémas affines, ce qui sera suffisant pour nos besoins. On laisse le soin au lecteur d'énoncer les définitions et résultats qui suivent dans des cadres plus généraux.

Soit donc A un anneau muni d'un élément régulier $t \in A$. Soit B une A-algèbre syntomique finie, étale en dehors de $V(t)$, c'est à dire $B[\frac{1}{t}]$ est une $A[\frac{1}{t}]$ algèbre étale. En particulier $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est fini localement libre. Notons alors

$$\mathrm{tr}_{B/A} : B \longrightarrow A$$

la trace et intéressons nous à la forme quadratique du A-module B

$$\begin{array}{ccc} B\times B & \longrightarrow & A \\ (b_1,b_2) & \longmapsto & \mathrm{tr}_{B/A}(b_1b_2). \end{array}$$

Après inversion de t la forme bilinéaire associée induit une dualité parfaite.

Définition 2. *On note $\mathcal{D}^{-1}_{B/A}$, la codifférente, le sous B-module de $B[\frac{1}{t}]$ défini par*

$$\mathcal{D}^{-1}_{B/A} = \{b \in B[\frac{1}{t}] \mid \mathrm{tr}_{B/A}(bB) \subset A\}.$$

Pour l'instant l'exposant « -1 »dans la notation $\mathcal{D}^{-1}_{B/A}$ n'est qu'une notation, bien que l'on va voir qu'il a une signification plus précise.

1.4. **Le lien entre le discriminant et la différente.** On garde les hypothèses et notations de la section précédente.

Proposition 1. *La codifférente $\mathcal{D}^{-1}_{B/A} \subset B[\frac{1}{t}]$ est un idéal fractionnaire inversible d'inverse noté $\mathcal{D}_{B/A}$. De plus*

$$\mathcal{D}_{B/A} = \Delta_{B/A}.$$

Démonstration. Utilisant que B est une A-algèbre de présentation finie on se ramène au cas noethérien (le lecteur ne désirant pas faire cette réduction pourra utiliser les résultats de [2] à la place [16]).

Notons $X = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(A)$ et choisissons un plongement

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{i} & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \swarrow{\scriptstyle g} \\ & S & \end{array}$$

où Y est lisse sur S. Considérons la dualité de Verdier pour les faisceaux cohérents sur Y et S relativement au morphisme f ([16], [9]). Le module dualisant est

$$f^!\mathcal{O}_S = i^!(g^!\mathcal{O}_S) = \det \mathbb{L}_{X/S}.$$

Notons $D = \det \mathbb{L}_{X/S}$. Il y a un morphisme trace $\mathcal{O}_S$-linéaire

$$\mathrm{tr} : f_*D = f_*f^!\mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S.$$

De plus le théorème de dualité implique que le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X,D) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) \\ d & \longmapsto & [s \mapsto \mathrm{tr}(sd)] \end{array}$$

est un isomorphisme.

Plus précisément, localement sur S, quitte à restreindre Y en un voisinage ouvert plus petit de X,

$$X = V(I) \subset Y, \;\; I = (f_1, \dots, f_n), \;\; f_1, \dots, f_n \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$$

où n est la dimension relative de Y sur S. Alors

$$I/I^2 = B\bar{f}_1 \oplus \cdots \oplus B\bar{f}_n.$$

Soit $\omega_{Y/S} = \Omega^n_{Y/S}$. Alors

$$D = (\det I/I^2)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*\omega_{Y/S} = (\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{f}_n)^{-1}\mathcal{O}_X \otimes i^*\omega_{Y/S}.$$

Via ces identifications, l'application trace $\mathrm{tr} : D \longrightarrow A$ s'identifie à l'application résidu définie dans le chapitre 9 de [16] :

$$\begin{array}{rcl} (\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{f}_n)^{-1}\mathcal{O}_X \otimes i^*\omega_{\mathbb{A}^n_S/S} & \longrightarrow & A \\ (\bar{f}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{f}_n)^{-1} \otimes i^*\omega & \longmapsto & \mathrm{Res}_{Y/S}\begin{bmatrix} \omega \\ f_1, \dots, f_n \end{bmatrix}. \end{array}$$

Soit $d_0 \in \Gamma(X, D)$ la section définissant $\Delta_{X/S}$ dans $\det \mathbb{L}_{X/S}$, c'est à dire celle induite par le déterminant du morphisme $I/I^2 \longrightarrow i^*\Omega^1_{Y/S}$. Via l'isomorphisme précédent

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(X, D) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(f_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_S) \\ d_0 & \longmapsto & \mathrm{tr}_{B/A}. \end{array}$$

Cela résulte de la propriété du symbole résidu (R6) page 198 de [16].

Traduisons tout cela en termes d'algèbres. Étant donné que B est étale après inversion de t, $\Delta_{B/A}$ contient une puissance de t. Donc, $\Delta^{-1}_{B/A}$, qui est un sous-B-module de l'anneau total des fractions de B, vérifie en fait que $\Delta^{-1}_{B/A} \subset B[\frac{1}{t}]$. Les considérations précédentes entraînant alors que

$$\mathrm{tr}_{B/A}(\Delta^{-1}_{B/A}) \subset A$$

et l'application

$$\begin{array}{rcl} \Delta^{-1}_{B/A} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(B, A) \\ d & \longmapsto & [b \mapsto \mathrm{tr}_{B/A}(bd)] \end{array}$$

est un isomorphisme. Le résultat s'en déduit. □

Exemple 1. *Soit K un corps valué complet pour une valuation discrète. Soit $L|K$ une extension séparable de degré fini. Alors, $\mathcal{O}_L$ est une $\mathcal{O}_K$-algèbre syntomique (EGA IV, 19.3.2) et même globalement intersection complète (*[1]*, lemme 7.1). Soit π_L une uniformisante de L et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_L/\pi_L^{a_i}$$

Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $\mathcal{O}_L$ comme $\mathcal{O}_K$-module. Notons f le degré résiduel de $L|K$. Alors

$$v_K(\det(\mathrm{tr}_{L/K}(e_ie_j))) = f\sum_i a_i$$

où v_K désigne la valuation normalisée de K.

2. Le diviseur associé à un schéma en groupes fini localement libre génériquement étale

Soit S un schéma et G un S-schéma en groupes commutatif fini localement libre. Tous les schémas en groupes finis localement libres seront supposés commutatifs dans cet article. Supposons G étale au dessus d'un ouvert schématiquement dense de S. Notons

$$l_{G/S} \in \mathbb{D}^{[-1,0]}(\mathcal{O}_S)$$

sont complexe de co-Lie ([18] VII.3.1), un complexe parfait de rang nul.

Définition 3. *On note $\delta_G = \mathrm{Div}(l_{G/S})$, un diviseur de Cartier sur S, de fibré en droites sous-jacent* $\det l_{G/S}$.

Vu comme idéal inversible dans $\mathcal{O}_S$ une définition équivalente de δ_G est

$$\delta_G = \mathrm{Fitt}_0\, \omega_G$$

où ω_G désigne le faisceau conormal associé à la section unité de G.

Le support de δ_G est le complémentaire du plus grand ouvert de S sur lequel G est étale. Si $f : G \longrightarrow S$,

$$\Delta_{G/S} = f^*\delta_G.$$

Concrètement, localement sur S, on peut écrire $S = \mathrm{Spec}(A)$,

$$G = V(f_1, \ldots, f_n) \subset U \subset \mathbb{A}^n_S, \quad f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S})$$

où U est un ouvert de l'espace affine et la section unité de G correspond à la section $T_1 = \cdots = T_n = 0$ de l'espace affine. Alors,

$$\delta_G = \Big(\det \big(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(0, \ldots, 0)\big)_{1 \le i,j \le n} \Big).$$

Si S est le spectre d'un anneau de valuation V et

$$\omega_G \simeq \bigoplus_{i \in I} V/x_i V$$

alors

$$\delta_G = (\prod_{i \in I} x_i).$$

Lorsque X est intègre noethérien et normal, cela donne une expression du diviseur de Weil associé à δ_G en termes de ω_G.

Le lemme qui suit dit que la correspondance $G \mapsto \delta_G$ est une fonction additive de la catégorie exacte des schémas en groupes finis localement libres génériquement étales sur S vers le groupe des diviseurs de Cartier sur S.

Lemme 1. *Soit*

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes du type précédent. Alors,

$$\delta_{G_2} = \delta_{G_1} + \delta_{G_3}.$$

Démonstration. Cela résulte de l'existence d'un vrai triangle ([18] VII.3.1.1.5)

$$l_{G_3/S} \longrightarrow l_{G_2/S} \longrightarrow l_{G_1/S} \xrightarrow{+1}$$

□

Lemme 2. *Supposons que, localement sur S, $|G| \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ n'est pas un diviseur de 0. Alors G^D satisfait aux hypothèses précédentes et*

$$\delta_G + \delta_{G^D} = \mathrm{div}(|G|).$$

Démonstration. La première assertion est claire. Pour la seconde, on peut se placer localement sur S et supposer que G est le noyau d'une isogénie de schémas abéliens

$$f : A \longrightarrow B.$$

Le triangle « filtration de Hodge »

$$l_G[-1] \longrightarrow \big[\mathcal{H}^1_{dR}(B/S) \longrightarrow \mathcal{H}^1_{dR}(A/S)\big] \longrightarrow l^\vee_{G^D} \xrightarrow{+1}$$

fournit une égalité

$$\delta_G + \delta_{G^D} = \mathrm{Div}\big[\mathcal{H}^1_{dR}(B/S) \longrightarrow \mathcal{H}^1_{dR}(A/S)\big]$$

Or si $d = \dim A = \dim B$,

$$\mathrm{Div}\big[\mathcal{H}^1_{dR}(B/S) \xrightarrow{f^*} \mathcal{H}^1_{dR}(A/S)\big] = \mathrm{Div}\big[\mathcal{H}^{2d}_{dR}(B/S) \xrightarrow{f^*} \mathcal{H}^{2d}_{dR}(A/S)\big]$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{2d}_{dR}(B/S) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{H}^{2d}_{dR}(A/S) \\ {\scriptstyle \mathrm{tr}}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & {\scriptstyle \simeq}\downarrow{\scriptstyle \mathrm{tr}} \\ \mathcal{O}_S & \xrightarrow{\times \deg f} & \mathcal{O}_S \end{array}$$

permet de conclure puisque $\deg f = |G|$. □

Notons également le lemme qui suit.

Lemme 3. *Soit $h : T \longrightarrow S$ un morphisme plat. Alors $\delta_{h^*G} = h^*\delta_G$.*

La proposition suivante sera fondamentale dans la suite.

Proposition 2. *Soit $t \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ un élément régulier localement sur S. Soit*

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & & \xrightarrow{f} & & G_2 \\ & {\scriptstyle p_1}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle p_2} & \\ & & S & & \end{array}$$

un morphisme de S-schémas en groupes finis localement libres, étales en dehors de $V(t)$. Supposons que le morphisme f induit un isomorphisme en dehors de $V(t)$. Alors,

$$|G_1|.\delta_{G_2} = |G_1|.\delta_{G_1} + 2.\mathrm{Div}[p_{2*}\mathcal{O}_{G_2} \xrightarrow{f^*} p_{1*}\mathcal{O}_{G_1}].$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1. Plus précisément, puisque l'on doit vérifier une égalité de diviseurs, on peut se restreindre localement sur S. On peut en particulier supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$, $G_1 = \mathrm{Spec}(B_1)$, $G_2 = \mathrm{Spec}(B_2)$, B_1 et B_2 sont deux A-modules libres, $\delta_{G_1} = (f_1)$ et $\delta_{G_2} = (f_2)$. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de B_1 comme A-module et $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de B_2. Via $f^* : B_2 \hookrightarrow B_1$ soit $M \in M_n(A)$ la matrice de passage entre ces deux bases, $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n} = M.(e_i)_{1\leq i\leq n}$. On a donc $M \in \mathrm{GL}_n(A[\frac{1}{t}])$. Il y a alors une égalité d'idéaux

$$\mathrm{Div}[p_{2*}\mathcal{O}_{G_2} \xrightarrow{f^*} p_{1*}\mathcal{O}_{G_1}] = A.\det(M).$$

Soit Q_1, resp. Q_2, la matrice de la forme quadratique trace dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, resp. $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. On dispose de la formule de changement de base

$$Q_2 = {}^tMQ_1M.$$

D'après la proposition 1, pour $i \in \{1, 2\}$, $f_i^{-1}B_i$ est le sous-A-module de $B_i[\frac{1}{t}]$ engendré par les lignes de Q_i^{-1}. Cela implique que pour $i \in \{1, 2\}$ on a l'égalité $f_i^n = \det(Q_i)$. On a donc

$$f_2^n = \det(Q_2) = \det(M)^2 \det(Q_1) = \det(M)^2 f_1^n.$$

□

Corollaire 1.
- *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a toujours $\delta_{G_1} \leq \delta_{G_2}$, avec égalité si et seulement si f est un isomorphisme.*
- *Le support du diviseur $\delta_{G_1}^{-1}\delta_{G_2}$ est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est un isomorphisme.*
- *Soit $G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} G''$ une suite telle que u est une immersion fermée, $v \circ u = 0$ et le morphisme $G/G' \longrightarrow G''$ est un isomorphisme en dehors de $V(t)$. Alors $\delta_G \leq \delta_{G'} + \delta_{G''}$ avec égalité si et seulement si le morphisme $G \longrightarrow G''$ est un épimorphisme fppf, c'est à dire est plat.*

3. Le degré d'un groupe fini et plat génériquement étale sur un anneau de valuation

Soit p un nombre premier. Soit K un corps de caractéristique 0 muni d'une valuation

$$v : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

telle que $v(p) = 1$. On ne suppose pas nécessairement cette valuation discrète et on ne fait également aucune hypothèse sur le corps résiduel de K. On note $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. Soit G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ (puisque tout $\mathcal{O}_K$-module de type fini sans p-torsion est libre cela est équivalent à être fini localement libre). On supposera toujours, c'est le seul cas intéressant, que l'ordre de G est une puissance de p. On note $|G|$ l'ordre de G et $\operatorname{ht} G$ sa hauteur,

$$|G| = p^{\operatorname{ht} G}.$$

Enfin si $\mathfrak{a} = (a)$ est un idéal principal non nul de $\mathcal{O}_K$ on notera $v(\mathfrak{a}) := v(a)$.

Définition 4. *On note* $\deg G = v(\delta_G)$.

Il existe une collection finie d'éléments de $\mathcal{O}_K$, $(x_i)_{i\in I}$, telle que

$$\omega_G \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_K/x_i\mathcal{O}_K.$$

Alors,

$$\deg G = \sum_{i\in I} v(x_i).$$

Exemple 2.
- *Le groupe G est étale si et seulement si* $\deg G = 0$. *Il est de type multiplicatif si et seulement si* $\deg G = \operatorname{ht} G$.
- *Si G est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n et dimension d alors,* $\deg G = nd$.
- *Avec les notations du corollaire 1.5.1 de* [21], *si G est un schéma en groupes de type $(p, \dots, p)$ associé à la collection $(\gamma_i, \delta_i)_{1\leq i\leq r}$,* $\deg G = \sum_{i=1}^{r} v(\delta_i)$.

On a d'après les lemmes 1, 2 et 3 :

Lemme 4.
- *Soit* $0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$ *une suite exacte de groupes finis localement libres sur $\mathcal{O}_K$. Alors,*
$$\deg G_2 = \deg G_1 + \deg G_3.$$
- *On a,*
$$\deg G + \deg G^D = \operatorname{ht} G.$$
- *Si $L|K$ est une extension valuée*
$$\deg(G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L) = \deg G.$$

On notera que le second point du lemme précédent implique le corollaire qui suit.

Corollaire 2. *On a* $\deg G \leq \operatorname{ht} G$.

Définition 5. *Soient Λ_1, Λ_2 deux sous-$\mathcal{O}_K$-modules de type fini d'un K-espace vectoriel de dimension finie qui engendrent cet espace vectoriel. Si $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ on note*

$$\chi(\Lambda_1, \Lambda_2) = v(\operatorname{Div}(\Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2)) = v(\operatorname{Fitt}_0(\Lambda_2/\Lambda_1)).$$

En général, on note

$$\chi(\Lambda_1, \Lambda_2) = \chi(\Lambda_1, p^k\Lambda_2) + k$$

pour k grand.

Le symbole $\chi(-,-)$ satisfait des propriétés identiques à celui de la section 1 du chapitre III de [23]. La proposition clef sur laquelle se base toute la suite est la suivante. C'est la traduction de la proposition 2.

Proposition 3. *Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ induisant un isomorphisme en fibre générique. Soient $G = Spec(A)$, $G' = Spec(A')$ et $f^* : A' \hookrightarrow A$. Alors*

$$\deg G' = \deg G + \frac{2}{|G|}\chi(A, f^*A').$$

On notera le corollaire suivant traduction du corollaire 1.

Corollaire 3. – *Soit $f : G \longrightarrow G'$ comme dans la proposition précédente. Alors,*

$$\deg G \leq \deg G'.$$

C'est de plus un isomorphisme si et seulement si $\deg G = \deg G'$.

– *Soit*

$$G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} G''$$

une suite telle que u est une immersion fermée, $v \circ u = 0$ et le morphisme $G/G' \longrightarrow G''$ est un isomorphisme en fibre générique. Alors,

$$\deg G \leq \deg G' + \deg G''$$

avec égalité si et seulement si le morphisme $G \longrightarrow G''$ est un épimorphisme fppf, c'est à dire est plat.

Corollaire 4. *Supposons la valuation de K discrète. Soit G un schéma en groupes fini sur $Spec(K)$ possédant un prolongement sur $Spec(\mathcal{O}_K)$ et soit $\mathcal{T}(G)$ le treilli fini des prolongements de G sur $Spec(\mathcal{O}_K)$ ([21], section 2.2). La fonction degré définit une fonction strictement croissante* $\deg : \mathcal{T}(G) \longrightarrow [0, \mathrm{ht}\, G]$. *Le plus grand élément, resp. le plus petit élément, de $\mathcal{T}(G)$ est celui où cette fonction atteint son maximum, resp. son minimum. Via la bijection $\mathcal{T}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(G^D)$ donnée par la dualité de Cartier les fonctions degré se correspondent par application de la symétrie $x \mapsto \mathrm{ht}(G) - x$.*

4. La filtration de Harder-Narasimhan d'un groupe fini localement libre sur un anneau de valuation

Soient K et v comme dans la section précédente.

4.1. **Rappels sur les groupes finis localement libres.** Notons $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ la catégorie des schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ (ce qui est la même chose que fini localement libre) d'ordre une puissance de p et $\mathcal{G}r_K$ la même catégorie sur K. Notons $\mathcal{G}r^f_{\mathcal{O}_K}$ la catégorie des schémas en groupes finis sur $\mathcal{O}_K$, non nécessairement plats.

Si $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K il y a une équivalence

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}r_K & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) - \text{modules finis annulés par une puissance de } p \\ G & \longmapsto & G(\overline{K}). \end{array}$$

L'inclusion $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K} \hookrightarrow \mathcal{G}r^f_{\mathcal{O}_K}$ possède un adjoint à droite, le foncteur de platification (on tue la p-torsion dans l'algèbre du schéma en groupes).

On note $G \mapsto G_\eta$ le foncteur fibre générique. Si $H_1, H_2 \subset G$ sont des sous-groupes fermés de G et que tous trois sont dans $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ alors

$$H_1 \subset H_2 \Leftrightarrow H_{1,\eta} \subset H_{2,\eta}.$$

Si $G \in \mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ est fixé il y a une opération d'adhérence schématique qui induit une bijection strictement croissante

$$\{\text{Sous-gp. fermés de } G_\eta\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Sous-gp. fermés de } G \text{ plats sur } \mathcal{O}_K\}$$

d'inverse donné par l'application fibre générique. Lorsque la valuation de K est discrète on renvoie pour cela à la section 2 de [21]. La construction de [21] s'étend au cas de valuation quelconque une fois remarqué que si V est un K-espace vectoriel de dimension finie, $M \subset V$ un sous-$\mathcal{O}_K$-module de type fini et $W \subset V$ un sous-K-espace vectoriel alors $W \cap M$ est un sous-$\mathcal{O}_K$-module de type fini facteur direct de M.

En particulier l'ensemble ordonné des sous-groupes finis et plats de G forme un treilli. On notera $H \mapsto \overline{H}^G$ l'opération d'adhérence schématique. Si $G_1 \subset G_2$ est une immersion fermée dans $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ et $H \subset G_{1,\eta}$ est un sous-groupe fermé alors

$$\overline{H}^{G_1} = \overline{H}^{G_2}.$$

Ainsi, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté on parlera d'adhérence schématique sans préciser le sous-groupe dans lequel on prendra l'adhérence.
Par exemple, si H est un groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et $G \subset H_\eta$ un sous-groupe fini, pour tout n tel que $G \subset H_\eta[p^n]$ on peut considérer $\overline{H}^{H[p^n]}$ indépendamment de n et l'appeler l'adhérence schématique de G dans H. Cela définit une bijection

$$\{\text{Sous-gp. plats finis de } H\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Sous réseaux } \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) \text{ stables dans } V_p(H) \text{ contenant } T_p(H)\}.$$

Si $G \in \mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$, $H \subset G$ est un sous-groupe fermé dans $\mathcal{G}r^f_{\mathcal{O}_K}$, alors $\overline{H_\eta}^G$ est le platifié de H.

La catégorie $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ est une catégorie exacte comme sous-catégorie exacte de la catégorie abélienne des faisceaux fppf de groupes abéliens sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Une suite

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{u} G_2 \xrightarrow{v} G_3 \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si u est une immersion fermée, le noyau de v (dans la catégorie de tous les $\mathcal{O}_K$-schémas en groupes) est G_1 et v est fidèlement plat. Cela est encore équivalent à dire que la suite associée de faisceaux fppf sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ est exacte. Une formulation équivalente est que u est une immersion fermée et v induit un isomorphisme $G_2/G_1 \xrightarrow{\sim} G_3$.

Tout morphisme dans $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ possède un noyau, il s'agit du platifié du noyau usuel comme morphisme de schémas en groupes. Il s'agit encore de l'adhérence schématique du noyau en fibre générique. De même tout morphisme dans $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ possède une image, l'adhérence schématique de l'image en fibre générique. Néanmoins, la catégorie $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ n'est pas abélienne en général (c'est tout de même le cas lorsque $e_{K/\mathbb{Q}_p} < p-1$, cf. [21]). Il existe des morphismes dans $\mathcal{G}r_{\mathcal{O}_K}$ qui sont des isomorphismes en fibre générique, mais qui ne sont pas des isomorphismes. C'est par exemple le cas du morphisme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_p$ sur $\mathbb{Z}_p[\zeta_p]$ qui à $\overline{1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ associe une racine primitive de l'unité.

4.2. **Analogie avec les fibrés vectoriels sur une courbe.** Soit X une courbe projective lisse sur un corps. On a l'analogie résumée par le tableau suivant entre la théorie des fibrés vectoriels sur X et la catégorie des groupes plats finis sur $\mathcal{O}_K$.

Groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$	Fibrés vectoriels sur X
$\mathrm{ht}\, G$	$\mathrm{rg}\, \mathcal{E}$
$\deg G$	$\deg \mathcal{E}$
ht et deg additives/suites exactes	rg et deg additives/suites exactes
Sous-groupe fermé	Sous-fibré localement facteur direct
$G \to G'$ isomorphisme en fibre générique	Modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$
$\deg G' \geq \deg G$	$\deg \mathcal{E}' \geq \deg \mathcal{E}$
$\deg G = \deg G' \Leftrightarrow G \to G'$ iso	$\deg \mathcal{E} = \deg \mathcal{E}' \Leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}'$

Le formalisme de Harder-Narasimhan que l'on va utiliser est donc le suivant. On suppose donné une catégorie exacte $\mathcal{C}$ ainsi qu'une catégorie abélienne $\mathcal{D}$ et un foncteur « fibre générique »exacte et fidèle

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

tel que pour tout objet X de $\mathcal{C}$ le foncteur F induise une bijection entre l'ensemble des sous-objets de X et ceux de $F(X)$. On suppose de plus donné une fonction additive rang

$$\mathrm{rg} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{N}$$

telle que $\mathrm{rg}(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ainsi qu'une fonction additive degré

$$\deg : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant que si $u : X \longrightarrow Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $F(u)$ soit un isomorphisme alors $\deg(X) \leq \deg(Y)$ avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme (pour être rigoureux il faut supposer que les catégories en jeux sont localement petites et les fonctions définies sur l'ensemble des classes d'isomorphismes des objets de ces catégories). On suppose de plus que si $X \in \mathcal{C}$ alors l'ensemble des nombres $\deg(Y)$, lorsque Y parcourt les sous-objets stricts de X (ceux s'insérant dans une suite exacte), est borné supérieurement. On pose $\mu = \frac{\deg}{\mathrm{rg}}$.

Théorème 1. *Sous les hypothèses précédentes on peut développer un formalisme de Harder-Narasimhan dans la catégorie exacte $\mathcal{C}$ relativement à la fonction pente μ.*

Plutôt que de donner la démonstration générale de ce théorème on va directement le faire dans le cadre dont nous avons besoin.

4.3. **La fonction μ.** *Convention : Désormais tous les schémas en groupes seront finis et plats sur $\mathcal{O}_K$, d'ordre une puissance de p. Par sous-groupe, on entendra toujours sous-groupe fermé fini et plat*

Définition 6. *Soit G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ non nul. On pose*

$$\mu(G) = \frac{\deg G}{\mathrm{ht}\, G}.$$

Des résultats de la section 3 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) *On a $\mu(G) \in [0,1]$ et*

$$\begin{aligned} \mu(G) = 0 &\Leftrightarrow G \text{ étale} \\ \mu(G) = 1 &\Leftrightarrow G \text{ de type multiplicatif} \\ \mu(G^D) &= 1 - \mu(G). \end{aligned}$$

(2) *Soit H un groupe p-divisible de dimension d et hauteur h. Alors,*

$$\forall n,\ \ \mu(H[p^n]) = \frac{d}{h}.$$

(3) *Si $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$ est exacte avec G' et G'' non nuls, alors,*

$$\mu(G) \in [\mu(G'), \mu(G'')]$$

où l'on note $\forall a, b \in \mathbb{R}, [a,b]$ pour le segment noté usuellement $[a,b]$ si $a \leq b$ et $[b,a]$ si $a > b$. Si de plus $\mu(G') \neq \mu(G'')$,

$$\mu(G) \in]\mu(G'), \mu(G'')[.$$

(4) *Soit $G \longrightarrow G'$ un morphisme qui est un isomorphisme en fibre générique. Alors $\mu(G) \leq \mu(G')$ avec égalité si et seulement si c'est un isomorphisme.*

(5) *Soit $G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} G''$ une suite telle que $vu = 0$, G' et G'' sont non nuls, u est une immersion fermée et le morphisme $G/G' \longrightarrow G$ est un isomorphisme en fibre générique. Alors,*

$$\mu(G) \leq \sup\{\mu(G'), \mu(G'')\}.$$

Si de plus $\mu(G') \neq \mu(G'')$ alors,

$$\mu(G) < \sup\{\mu(G'), \mu(G'')\}.$$

Si $\mu(G) = \sup\{\mu(G'), \mu(G'')\}$ alors $\mu(G) = \mu(G') = \mu(G'')$ et la suite

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

4.4. **Groupes semi-stable.** On emprunte la terminologie de [15].

Définition 7. *Un groupe non nul G est semi-stable si et seulement si pour tout sous-groupe non nul G' de G, $\mu(G') \leq \mu(G)$.*

D'après le point (3) du corollaire 5, G est semi-stable si et seulement si pour tout sous-groupe propre non nul G' de G, $\mu(G) \leq \mu(G/G')$.

4.5. **Sous-groupes SCSS.** Désormais on suit pas à pas le chapitre 1.3 de [15].

Définition 8. *Soit G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ non semi-stable et non nul. Un sous-groupe non nul G' de G est dit SCSS si*

(1) *Il est semi-stable.*

(2) *Pour tout G'' tel que $G' \subsetneq G'' \subset G$ on a $\mu(G') > \mu(G'')$.*

Le lemme qui suit résulte du point (3) du corollaire 5.

Lemme 5. *Le sous-groupe non nul G' de G vérifie la condition (2) de la définition précédente si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

- *Pour tout sous-groupe non nul G'' de G/G', $\mu(G'') < \mu(G')$.*
- *Pour tout sous-groupe non nul semi-stable G'' de G/G', $\mu(G'') < \mu(G')$.*

Voici l'analogue du lemme clef 1.3.5 de [15] qui fait marcher toute la machine.

Lemme 6. *Soit G non semi-stable, G_1 et G_2 deux sous-groupes de G tels que G_1 soit semi-stable et G_2 vérifie la condition (2) de la définition 8. Si $G_1 \nsubseteq G_2$ alors, $\mu(G_2) > \mu(G_1)$.*

Démonstration. Par hypothèse, le morphisme $G_1 \xrightarrow{f} G/G_2$ est non nul et est donc non nul en fibre générique. Soit $H \subset G_1$ le platifié du noyau de f. Notons $G_1' = G/H$. Soit G_1'' l'adhérence schématique dans G/G_2 de l'image de f en fibre générique, $G_1'' \subset G/G_2$ et $G_1'' \neq 0$. Le morphisme $G_1 \longrightarrow G/G_2$ se décompose en

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \longrightarrow & G_1' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \\ G/G_2 & \longleftarrow & G_1'' & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

où le morphisme $G_1' \longrightarrow G_1''$ est un isomorphisme en fibre générique, donc $\mu(G_1') \leq \mu(G_1'')$. Puisque G_1 est semi-stable, $\mu(G_1') \geq \mu(G_1)$. Par hypothèse sur G_2, d'après le lemme 5, $\mu(G_1'') < \mu(G_2)$, d'où le résultat. □

Proposition 4. *Soit G non semi-stable. Il existe alors un unique sous groupe SCSS, G' dans G. De plus $\mu(G') = \sup\{\mu(G'') \mid G'' \subset G\}$ et G' est le sous-groupe de plus grande hauteur parmi les sous-groupes G'' tels que $\mu(G'')$ soit égal à cette borne supérieure.*

Démonstration. La démonstration est strictement analogue à celle de la proposition 1.3.5 de [15] en utilisant le lemme 6 pour vérifier l'unicité. □

On notera au passage le lemme suivant qui résulte immédiatement du lemme 6.

Lemme 7. *Soit G non semi-stable et $G' \subset G$ un sous-groupe SCSS. Soit $G'' \subset G$ tel que $\mu(G'') = \mu(G')$. Alors $G'' \subset G'$.*

4.6. **La filtration de Harder Narasimhan.**

Théorème 2. *Soit G un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$ non nul. Il possède alors une unique filtration par des sous-groupes fermés plats finis*

$$0 = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_k = G$$

telle que

(1) *Pour tout i, G_{i+1}/G_i est semi-stable*
(2) *Si $i \geq 1$, $\mu(G_i/G_{i-1}) > \mu(G_{i+1}/G_i)$.*

Une caractérisation équivalente de cette filtration est

(1) *Pour tout i, G_{i+1}/G_i est semi-stable*
(2) *Si $i \geq 1$, $G_i/G_{i-1} \subset G/G_{i-1}$ est SCSS.*

Démonstration. La démonstration est strictement identique à celle des propositions 1.3.9 et du lemme 1.3.7 de [15], en utilisant la proposition 4. □

Remarque 1. *La filtration de Harder-Narasimhan de G est invariante sous $Aut G$. On en déduit par exemple que tout schéma en groupes de type $(p, \dots, p)$ est semi-stable (on renvoie à l'exemple 4 pour une généralisation).*

4.7. **Décompletion.** La proposition suivante résulte du théorème 5 de [10].

Proposition 5. *Supposons l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ hensélien. Alors le foncteur $G \longmapsto G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des schémas en groupes finis et plats sur $Spec(\mathcal{O}_K)$ et ceux sur $Spec(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$.*

À partir de là si $\mathcal{O}_K$ est hensélien et G est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ alors la filtration de Harder-Narasimhan de $G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ est obtenue par extension des scalaires à partir de celle de G. Lorsque $\mathcal{O}_K$ est hensélien la théorie se ramène donc au cas où K est complet.

4.8. **Descente galoisienne.**

Proposition 6. *Supposons l'anneau des entiers de $\mathcal{O}_K$ hensélien. Soit $L|K$ une extension valuée. Soit G un groupe plat fini sur O_K. Le groupe G est semi-stable si et seulement si $G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ l'est. Plus généralement, la filtration de Harder-Narasimhan de $G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ est obtenue par extension des scalaires de celle de G à $\mathcal{O}_L$.*

Démonstration. On démontre directement l'assertion sur la filtration de Harder-Narasimhan. Supposons d'abord $L|K$ de degré fini et galoisienne. C'est alors une conséquence de l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan et de ce que si H est plat fini sur $\mathcal{O}_L$ et $\tau \in \mathrm{Gal}(L|K)$, alors $\deg(H^\tau) = \deg H$ et donc $\mu(H^\tau) = \mu(H)$.

Si $L|K$ est de degré fini mais n'est plus galoisienne il suffit de considérer une clôture galoisienne $L'|L|K$, et d'appliquer le cas galoisien aux extensions galoisiennes $L'|K$ et $L'|L$.

L'assertion générale résulte alors de ce que les sous-schémas en groupes finis et plats de $G \otimes \mathcal{O}_L$ sont tous définis, comme sous-schémas en groupes de G, sur une extension de degré fini de K dans L. □

4.9. **Polygone de Harder-Narasimhan.**

Définition 9. *On appelle polygone de Harder-Narasimhan de G l'unique polygone concave débutant en $(0,0)$ et se terminant en $(\mathrm{ht}\, G, \deg G)$ tel que si $0 = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_k = G$ est sa filtration de Harder-Narasimhan, alors ses pentes sont les $(\mu(G_i/G_{i-1}))_{1 \leq i \leq k}$ avec multiplicité $\mathrm{ht}\,(G_i/G_{i-1})$ pour la pente $\mu(G_i/G_{i-1})$. On le note $\mathrm{HN}(G)$.*

Exemple 3. *Soient $0 \to G^0 \to G \to G^{ét} \to 0$ la décomposition de G en parties connexes et étale et $0 \to G^{mult} \to G^0 \to G^u \longrightarrow 0$ la décomposition de G^0 en parties de type multiplicative et unipotentes. Alors, G^{mult} est le premier cran de la filtration de Harder-Narsimhan de G associé à la partie de pente 1, $G^{ét}$ est le quotient de G par le dernier cran de la filtration de Harder-Narasimhan associé à la partie de pente 0. Ainsi les hauteurs des parties étales, resp. multiplicatives, se lisent sur le polygone de Harder-Narasimhan comme les multiplicités des pentes 0, resp. 1.*

Comme dans le théorème 2 de [24] on a la proposition suivante.

Proposition 7. *Soit G plat fini. Pour tout sous-groupe G' de G, $\deg G' \leq \mathrm{HN}(G)\big(\mathrm{ht}(G')\big)$, en d'autres termes le point $(\mathrm{ht}(G'), \deg(G'))$ est en dessous du polygone $\mathrm{HN}(G)$. Le polygone $\mathrm{NH}(G)$ est donc l'enveloppe concave des points $(\mathrm{ht}(G'), \deg(G'))$ lorsque G' parcourt les sous-groupes de G. Si de plus $\deg G' = \mathrm{HN}(G)\big(\mathrm{ht}(G')\big)$, c'est à dire si le point est sur le polygone, il existe alors un saut de la filtration de Harder-Narasimhan $G_i \subsetneq G_{i+1}$ tel que $G_i \subset G' \subset G_{i+1}$.*

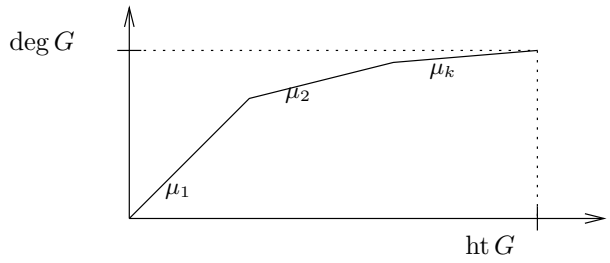

FIG. 1. Le polygone de Harder-Narasimhan de G

4.10. **Contrainte sur les morphismes.**

Lemme 8. *Soient G_1 et G_2 deux groupes plats finis sur $\mathcal{O}_K$ et semi-stables. Si $\mu(G_1) > \mu(G_2)$ alors*

$$Hom(G_1, G_2) = 0.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$. Supposons $f \neq 0$. Notons $(\ker f)^{\sim}$, resp. $(\mathrm{Im}\, f)^{\sim}$, l'adhérence schématique de $\ker f_\eta$, resp. $\mathrm{Im}\, f_\eta$. Par hypothèse $(\mathrm{Im}\, f)^{\sim} \neq 0$. Il y a une suite

$$(\ker f)^{\sim} \longrightarrow G_1 \longrightarrow (\mathrm{Im}\, f)^{\sim}$$

qui devient exacte en fibre générique. Si l'on avait $(\ker f)^{\sim} = 0$ alors le morphisme $G_1 \to (\mathrm{Im}\, f)^{\sim}$ serait un isomorphisme en fibre générique et donc $\mu(G_1) \leq \mu((\mathrm{Im}\, f)^{\sim}) \leq \mu(G_2)$ ce qui est impossible. Donc $(\ker f)^{\sim} \neq 0$. De plus $\mu((\ker f)^{\sim}) \leq \mu(G_1)$ et $\mu((\mathrm{Im}\, f)^{\sim}) \leq \mu(G_2)$. D'après le point (5) du corollaire 5 cela est impossible et donc $f = 0$. □

Du lemme précédent on déduit la proposition générale suivante.

Proposition 8. *Soient G_1 et G_2 deux groupes plats finis sur $\mathcal{O}_K$. Supposons que la plus petite pente du polygone de Harder-Narasimhan de G_1 soit strictement supérieures à la plus grande de celui de G_2. Alors,*

$$Hom(G_1, G_2) = 0.$$

4.11. **Polygone de Harder-Narasimhan et extensions.**

Définition 10. *Soit $\mathcal{P}_1$, resp. $\mathcal{P}_2$, un polygone concave à abscisses de rupture entières et défini sur le segment $[0, h_1]$, resp. $[0, h_2]$, où $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2$ comme étant le polygone défini sur le segment $[0, h_1 + h_2]$ par*

$$\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2 = \textit{enveloppe concave des } \big(i + j, \mathcal{P}_1(i) + \mathcal{P}_2(j)\big)_{\substack{0 \leq i \leq h_1, 0 \leq j \leq h_2 \\ i,j \in \mathbb{N}}}.$$

Comme fonction $\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2 : [0, h_1 + h_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la plus petite fonction concave linéaire par morceaux au dessus de la fonction

$$n \longmapsto \sup_{\substack{i+j=n \\ 0 \leq i \leq h_1, 0 \leq i \leq h_2}} \mathcal{P}_1(i) + \mathcal{P}_2(j).$$

Proposition 9. *Soit $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$. Alors*

$$\mathrm{HN}(G) \leq HN(G') * \mathrm{HN}(G'') = \mathrm{HN}(G' \oplus G'').$$

Démonstration. Soit K un sous-groupe de G. Notons $K \cap G'$ l'adhérence schématique de $K_\eta \cap G'_\eta$ dans G et, si $u : G \longrightarrow G'$, $u(K)$ l'adhérence schématique dans G'' de $u(K_\eta)$. Le point (5) du corollaire 5 appliqué à la suite

$$K \cap G' \longrightarrow K \longrightarrow u(K)$$

fournit les inégalités

$$\deg(K) \leq \deg(K \cap G') + \deg(u(K)) = \deg(K \cap G' \oplus u(K))$$

On conclut grâce à la proposition 7. □

On démontre également immédiatement la proposition qui suit.

Proposition 10. *Soit* $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \xrightarrow{v} G'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de schémas en groupes finis et plats sur* $\mathcal{O}_K$*. Supposons que la plus petite pente de* $\mathrm{HN}(G)$ *soit supérieure ou égale à la plus grande de* $\mathrm{HN}(G'')$*. Alors si* $(G'_k)_{0\leq i\leq k'}$ *est la filtration de Harder-Narasimhan de* G' *et* $(G''_i)_{0\leq i\leq k''}$ *celle de* G''*, la filtration de* G *est*

$$G'_0 \subsetneq G'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G'_{k'} = G' \subsetneq v^{-1}(G''_0) \subsetneq v^{-1}(G''_1) \subsetneq \cdots \subsetneq v^{-1}G''_{k''} = G$$

si la plus petite pente de $\mathrm{HN}(G')$ *est strictement plus petite que la plus grande de* $\mathrm{HN}(G'')$ *et*

$$G'_0 \subsetneq G'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G'_{k'-1} \subsetneq v^{-1}(G''_1) \subsetneq v^{-1}(G''_2) \subsetneq \cdots \subsetneq v^{-1}G''_{k''} = G$$

sinon. Donc

$$\mathrm{HN}(G)(x) = \begin{cases} \mathrm{HN}(G')(x) \text{ si } x \leq \mathrm{rg}G' \\ \deg G' + \mathrm{HN}(G'')\big(x - \mathrm{rg}(G')\big) \text{ si } x \geq \mathrm{rg}G'' \end{cases}$$

En particulier une extension de deux groupes semi-stables de même pente μ *est semi-stable de pente* μ*.*

4.12. **Réindexation de la filtration.**

Définition 11. *Soit* G *un schéma en groupes fini et plat sur* $\mathcal{O}_K$ *de filtration de Harder-Narasimhan* $0 = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_r = G$*. Soit* $\lambda \in [0,1]$ *et*

$$i(\lambda) = \sup\{1 \leq k \leq r \mid \mu(G_k/G_{k-1}) \geq \lambda\}$$

si $\mu(G_1/G_0) \geq \lambda$ *et* $i(\lambda) = 0$ *sinon. On pose alors*

$$G^{\lambda}_{\mathrm{HN}} = G_{i(\lambda)}.$$

On obtient ainsi une filtration décroissante $(G^{\lambda}_{\mathrm{HN}})_{\lambda\geq 0}$ de G.

Proposition 11. *La filtration de Harder-Narasimhan telle qu'indéxée dans la définition précédente est fonctorielle. Plus précisément, si* $f : G \longrightarrow G'$ *est un morphisme de schémas en groupes finis et plats sur* $\mathcal{O}_K$ *alors pour tout* $\lambda \in [0,1]$*,* f *induit un morphisme de* $G^{\lambda}_{\mathrm{HN}}$ *dans* $G'^{\lambda}_{\mathrm{HN}}$*.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du lemme 8. □

On a par exemple que G^{1}_{HN} est la partie multiplicative de G, si $G^{0+}_{\mathrm{HN}} = \cup_{\lambda>0} G^{\lambda}_{\mathrm{HN}}$, $G/G^{0+}_{\mathrm{HN}} = \pi_0(G)$ le plus grand quotient étale de G et G^{0+}_{HN} sa composante connexe neutre.

4.13. **Structure de catégorie abélienne sur les schémas en groupes semi-stables de pente donnée.**

Proposition 12. *Soient* G_1 *et* G_2 *deux schémas en groupes finis et plats sur* $\mathcal{O}_K$ *semi-stables de pente* μ *et* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *un morphisme. Alors* $\ker f$ *est plat sur Spec*$(\mathcal{O}_K)$*. De plus* $\ker f$*,* $\mathrm{Im}\, f$ *et* $\mathrm{coker}\, f$ *sont semi-stables de pente* μ*.*

Démonstration. Notons $(\ker f)^{\sim}$, resp. $(\mathrm{Im}\, f)^{\sim}$, l'adhérence schématique de $\ker f_\eta$, resp. $\mathrm{Im}\, f_\eta$. La proposition est alors une conséquence du point 5 du corollaire 5 appliqué à la suite

$$(\ker f)^{\sim} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f} (\mathrm{Im}\, f)^{\sim}.$$

□

Corollaire 6. *Soit* $\mu \in [0,1]$*. La catégorie des schémas en groupes finis et plats sur Spec*$(\mathcal{O}_K)$ *semi-stable de pente* μ *à laquelle on ajoute le schéma en groupes nul est une sous-catégorie abélienne de la catégorie des faisceaux fppf sur Spec*$(\mathcal{O}_K)$*.*

La filtration de Harder-Narasimhan fournit donc un dévissage de la catégorie exacte des schémas en groupes finis et plats par des objets vivant dans des catégories abéliennes. Notons également le corollaire intéressant suivant.

Corollaire 7. *Soit G un schéma en groupes semi-stable sur $Spec(\mathcal{O}_K)$. Pour tout $n \geq 1$, le noyau de la multiplication par p^n sur G est plat. De plus, $G[p^n]$ est semistable de pente $\mu(G[p^n]) = \mu(G)$. Si $p^n G \neq 0$ alors $p^n G$ est semi-stable de pente $\mu(p^n G) = \mu(G)$.*

5. Structures additionnelles

5.1. **Compatibilité à la dualité de Cartier.** Le corps K est comme précédemment. Rappelons que si G est un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$ alors, via l'identification canonique $G^{DD} = G$, les deux applications

$$\begin{array}{ccc} G' & \longmapsto & (G/G')^D \\ (G^D/G'')^D & \longmapsto & G'' \end{array}$$

induisent des bijections inverses entre les sous-groupes plats finis de G et ceux de G^D. Via l'accouplement parfait

$$G(\overline{K}) \times G^D(\overline{K}) \longrightarrow \mu_{p^\infty}(\overline{K})$$

et la correspondance bijective entre sous-groupes plats finis de G, resp. G^D, et sous groupes galois invariants de $G(\overline{K})$, resp. $G^D(\overline{K})$, cette correspondance est

$$\begin{array}{ccc} M' & \longmapsto & M'^{\perp} \\ M''^{\perp} & \longmapsto & M''. \end{array}$$

Lemme 9. *Soit G un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$. Alors, G est semi-stable si et seulement si G^D l'est.*

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que si G est semi-stable alors G^D l'est. Soit donc G semi-stable et $G' \subset G^D$ un sous-groupe plat fini. Alors,

$$\begin{array}{rl} & \mu((G^D/G')^D) = 1 - \mu(G^D/G') \leq \mu(G) \\ \Rightarrow & \mu(G^D/G') \geq 1 - \mu(G) = \mu(G^D). \end{array}$$

Donc, G^D est semi-stable. □

Notons $G^{\lambda+}_{\mathrm{HN}} = \cup_{\lambda' > \lambda} G^{\lambda'}_{\mathrm{HN}}$. Du lemme précédent on déduit le corollaire qui suit.

Corollaire 8. *Soit G un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$ et $0 = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_k = G$ sa filtration de Harder-Narasimhan, de pentes $\mu_1 > \cdots > \mu_k$. Alors, la filtration de Harder-Narasimhan de G^D est*

$$0 = (G/G_k)^D \subsetneq (G/G_{k-1})^D \subsetneq \cdots \subsetneq (G/G_1)^D \subsetneq G^D$$

de pentes $1 - \mu_k > \cdots > 1 - \mu_1$. On a donc pour $\lambda \in [0,1]$, via l'accouplement parfait $G(\overline{K}) \times G^D(\overline{K}) \longrightarrow \mu_{p^\infty}(\overline{K})$,

$$(G^D)^{\lambda}_{\mathrm{HN}}(\overline{K})^{\perp} = G^{(1-\lambda)^+}_{\mathrm{HN}}(\overline{K}).$$

5.2. **Compatibilité aux polarisations.** Du corollaire 8, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 9. *Soit G un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$ muni d'un isomorphisme $\lambda : G \xrightarrow{\sim} G^D$ tel que $\lambda^D = \epsilon\lambda$ avec $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Considérons le module galoisien $M = G(\overline{K})$ et l'accouplement associé à λ, $M \times M \longrightarrow \mu_{p^\infty}(\overline{K})$. Soit $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M$ les $\overline{K}$-points de la filtration de Harder-Narasimhan de G. Alors pour tout i tel que $0 \leq i \leq k$,*

$$M_i^{\perp} = M_{k-i}.$$

Pour $\lambda \in [0,1]$ si $M^{\lambda} = G^{\lambda}_{\mathrm{HN}}(\overline{K})$ et $M^{\lambda+} = \cup_{\lambda' > \lambda} M^{\lambda'}$ on a

$$(M^{\lambda})^{\perp} = M^{(1-\lambda)+}.$$

En particulier le drapeau $(M_\lambda)_{0 \leq \lambda < 1/2}$ est totalement isotrope, et la forme bilinéaire induite sur $M_{\frac{1}{2}}/M_{\frac{1}{2}+}$ est parfaite.

Ainsi pour un groupe G satisfaisant aux hypothèses du corollaire précédent, $\mu(G) = \frac{1}{2}$ et son polygone de Harder-Narasimhan est symétrique via la symétrie des pentes $\mu \mapsto 1 - \mu$. Lorsque G est annulé par p le corollaire implique que la filtration définit un sous-groupe parahorique du groupe symplectique ou orthogonal associé à M muni de l'accouplement défini par λ.

5.3. **Compatibilité aux actions.** Le corollaire qui suit est une conséquence immédiate de la proposition 11.

Corollaire 10. *La filtration de Harder-Narasimhan d'un groupe plat fini G est stable sous $End(G)$.*

Exemple 4 (Tout groupe CM est semi-stable)**.** *Soit G plat fini ne possédant aucun sous-groupe invariant sous $End(G)$. Alors, G est semi-stable. Plus généralement, pour tester la semi-stabilité il suffit de le faire sur des sous-groupes $End(G)$-invariants.*

6. Le cas des groupes dont l'algèbre est monogène

Soit G un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$ avec K comme dans les sections précédentes. Il est toujours muni d'une filtration de ramification inférieure $(G_\lambda)_{\lambda>0}$ sur G où

$$G_\lambda(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \ker(G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow G(\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathfrak{m}_\lambda))$$

avec $\mathfrak{m}_\lambda = \{x \in \mathcal{O}_{\overline{K}} \mid v(x) \geq \lambda\}$.

Supposons maintenant que $G = \mathrm{Spec}(A)$ avec

$$A \simeq \mathcal{O}_K[T]/(f(T))$$

où f est un polynôme unitaire vérifiant $f(0) = 0$, la section unité de G étant donnée par $T = 0$. Alors,

$$\deg G = v(f'(0)).$$

Il y a une fonction valuation

$$v : G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow [0, +\infty]$$

qui est la valuation des racines du polynôme f. Elle vérifie $v(x + y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$ et

$$G_\lambda(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \{x \in G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \mid v(x) \geq \lambda\}.$$

Alors,

$$\deg G = \sum_{x \in G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \setminus \{0\}} v(x) = \int_0^\infty (|G_\lambda| - 1) d\lambda.$$

Les sauts de la filtration $(G_\lambda)_\lambda$ et l'ordre des G_λ se lisent sur le polygone de Newton de f, dont les points de rupture sont en des abscisses p^i pour $0 \leq i \leq \mathrm{ht}\, G$.

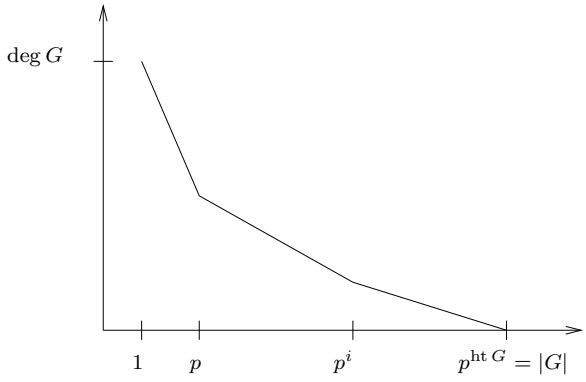

Fig. 2. Le polygone de Newton du groupe G

De ces analyses on déduit aisément la proposition qui suit.

Proposition 13. *Le groupe G est semi-stable si et seulement si le polygone de Newton de G est au dessus du polygone enveloppe convexe des points*

$$\big(1, \deg G\big), \big(p, \deg G(1 - \frac{1}{\operatorname{ht} G})\big), \ldots, \big(p^i, \deg G(1 - \frac{i}{\operatorname{ht} G})\big), \ldots, \big(|G|, 0\big).$$

Le corollaire suivant a été l'une des motivations principales pour l'auteur de cet article (bien qu'après coup il s'est avéré que ces filtrations aient d'autres intérets).

Corollaire 11. *Soit x un point à valeurs dans $\mathcal{O}_K$ de l'espace de Lubin-Tate des déformations d'un groupe p-divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Soit H le groupe p-divisible associé à la déformation x sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Alors, $H[p]$ est semi-stable si et seulement si x appartient au domaine D de la boule ouverte défini dans la section 23 de* [13].

L'espace de Lubin-Tate est un schéma formel $\mathfrak{X}$ isomorphe à $\operatorname{Spf}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\![x_1, \ldots, x_{n-1}]\!])$. Sa fibre générique comme espace rigide est donc isomorphe à une boule ouverte de dimension $n-1$. Le domaine D dont il est question dans le corollaire précédent est un ouvert admissible affinoïde dans cette boule ouverte. Il forme un domaine fondamental pour l'action des correspondances de Hecke non ramifiées sur cette boule ouverte. C'est un outil important pour l'étude des espaces de Lubin-Tate (cf. par exemple le chapitre I de [11]). L'auteur espère pouvoir utiliser les objets étudiés dans cet article afin de définir des généralisations de ce domaine D à des espaces de modules plus généraux.

On peut de même démontrer la proposition qui suit.

Proposition 14. *Notons* $\operatorname{Newt} G$ *le polygone de Newton de G. Alors,*

$$\operatorname{Newt} G = \textit{enveloppe convexe de } \{(|G'|, \deg G') \mid G' \subset G\}.$$

Soit $\operatorname{HN}(G)$ *son polygone de Harder-Narasimhan. Soit*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [1, +\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty[\times\mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (\log_p x, y) \end{array}$$

le changement d'échelle logarithmique des abscisses. Alors,

$$\operatorname{HN}(G) = \textit{enveloppe concave de } \varphi\big(-\operatorname{Newt} G + (0, \deg G)\big).$$

Ainsi, si i, avec $1 \leq i \leq \operatorname{ht} G - 1$, est l'abscisse d'un point de rupture du polygone de Harder-Narasimhan de G alors, p^i est l'abscisse d'un point de rupture du polygone de Newton de G.
La filtration de Harder-Narasimhan de G est extraite de la filtration de ramification de G. Plus précisément, soient $0 < a_1 < \cdots < a_{k-1} < \operatorname{ht}(G)$ les abscisses des points de rupture de $\operatorname{HN}(G)$ *et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{\operatorname{ht}(G)}$ les pentes du polygone de Newton de G, la pente λ_i intervenant entre les abscisses p^i et p^{i+1}. Alors, la filtration de Harder-Narasimhan de G est*

$$0 \subsetneq G_{\lambda_{a_1}} \subsetneq \cdots \subsetneq G_{\lambda_{a_{k-1}}} \subsetneq G.$$

On voit donc que, dans le cas monogène, les crans de la filtration de Harder-Narasimhan de G sont toujours des crans de la filtration de ramification inférieure et donc de la filtration de ramification supérieure définie par Abbes et Saito ([1]). Celle ci est en effet obtenue par réindexation de la filtration inférieure via une fonction de Herbrand. Ceci motive la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Supposons la valuation de K discrète. Soit G un groupe plat fini sur $\mathcal{O}_K$. Alors, les crans de la filtration de Harder-Narasimhan de G sont des crans de la filtration de Abbes-Saito de G.*

Bien sûr, comme le montre le cas monogène, la réciproque est fausse : un point de rupture du polygone de Newton précédent est un point de rupture du polygone de Harder-Narasimhan si et seulement si la différence de pentes en ce point est « suffisamment accentuée ».

7. Filtration de Harder-Narasimhan et familles de groupes plats finis

7.1. **Semi-continuité/continuité du polygone de Harder-Narasimhan.** Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension valuée complète pour une valuation discrète. Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{O}_F$-schéma formel localement formellement de type fini quasi-séparé. Soit G un schéma en groupes fini localement libre sur $\mathfrak{X}$ de hauteur constante $\mathrm{ht}(G)$. Notons $\mathfrak{X}^{an}$ l'espace analytique de Berkovich associé à $\mathfrak{X}$ ([4]).

Si $K|F$ est une extension valuée complète et $x \in X^{an}(K) = \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$, soit $\mathcal{P}(G_x)$ le polygone associé au groupe G spécialisé en x, G_x, sur $\mathcal{O}_K$. Si $L|K|F$, $x \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$ et $x' \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_L)$ le point induit par l'extension $L|K$, d'après la proposition 6, $\mathcal{P}(G_x) = \mathcal{P}(G_{x'})$. On peut donc définir pour tout point $x \in |\mathfrak{X}^{an}|$ un polygone $\mathcal{P}(G_x)$. On munit l'espace des polygones concaves définis sur le segment $[0, \mathrm{ht}(G)]$ à abscisses de ruptures entières de la topologie de la convergence uniforme. On remarquera que puisque l'on impose aux points de rupture d'être à coordonnées entières cette topologie coïncide avec celle de la convergence simple des valeurs du polygone aux points de $[0, \mathrm{ht}(G)] \cap \mathbb{N}$.

Théorème 3. *L'application $x \longmapsto \mathcal{P}(G_x)$ de $|\mathfrak{X}^{an}|$ vers l'espace des polygones de Harder-Narasimhan est continue. Elle vérifie de plus la propriété de semi-continuité suivante lorsque l'on muni $\mathfrak{X}^{an}$ de la G-topologie des domaines analytiques définie dans la section 1.3 de* [3]*. Soit $P_0 : [0, \mathrm{ht}(G)] \longrightarrow \mathbb{R}$ un polygone fixé à abscisses de ruptures entières. Alors*

$$\{x \in |\mathfrak{X}^{an}| \mid \mathcal{P}(G_x) \leq P_0\}$$

est un domaine analytique fermé dans $\mathfrak{X}^{an}$, qui définit un ouvert admissible dans l'espace rigide $\mathfrak{X}^{rig}$. En particulier si la fonction $x \mapsto \deg(G_x)$ est constante sur $\mathfrak{X}^{an}$ (ce qui est par exemple le cas si G est un groupe de Barsotti-Tate tronqué de dimension constante),

$$\{x \in |\mathfrak{X}^{an}| \mid G_x \text{ est semi-stable } \}$$

est un domaine analytique fermé.

Démonstration. On se ramène facilement au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel admissible quasi-compact au sens de Raynaud. Après un revêtement étale fini surjectif

$$q : Y \longrightarrow \mathfrak{X}^{an}$$

le groupe G^{an} devient localement constant sur Y (et non plus $Y_{\text{ét}}$). On peut de plus supposer d'après Raynaud ([6] théorème 4.1) que le morphisme q est induit par un morphisme $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ avec $\mathfrak{Y}$ admissible quasicompact. Le morphisme q envoie les domaines analytiques fermés sur des domaines analytiques fermés et les ouverts sur des ouverts. On peut donc supposer, quitte à changer $\mathfrak{X}$, que G^{an} est localement constant sur $\mathfrak{X}^{an}$. On peut de plus supposer, toujours quitte à changer $\mathfrak{X}$, que $\mathfrak{X}^{an}$ est connexe. Alors, si $K|F$ et $x \in \mathfrak{X}^{an}(K)$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \{\text{sous-groupes de } G^{an}\} & \longrightarrow & \{\text{sous-groupes de } G_x^{an}\} \\ H & \longmapsto & H_x \end{array}$$

est une bijection.

Par platification ([7]), après un éclatement formel admissible

$$h : \widetilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

les sous-groupes de h^*G^{an} se prolongent en des sous-groupes fermés plats finis de h^*G. On peut donc supposer que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(R)$ et que

$$\begin{array}{ccc} A = \{\text{sous-groupes plats finis de } G\} & \longrightarrow & \{\text{sous-groupes de } G^{an}\} \\ H & \longmapsto & H^{an} \end{array}$$

est une bijection. Notons encore G pour le groupe associé sur $\mathrm{Spec}(R)$. À tout $H \in A$ est associé un diviseur de Cartier δ_H sur $\mathrm{Spec}(R)$ trivial en dehors de $V(p)$ (confère section 2). Alors, la proposition 7 implique que

$$\{x \in \mathfrak{X}^{an} \mid \mathcal{P}(G_x) \leq P_0\} = \{x \in \mathfrak{X}^{an} \mid \forall H \in A \setminus \{0\},\ v(\delta_H(x)) \leq \mathcal{P}_0(\mathrm{ht}\, H)\}$$

qui est bien un domaine analytique fermé. On a donc bien la propriété de semi-continuité annoncée. Pour la continuité relativement à la topologie usuelle $|\mathfrak{X}^{an}|$, il suffit de constater que l'application $x \longmapsto \mathcal{P}(G_x)$ est l'application

$$x \longmapsto \text{enveloppe concave de } \{(0,0)\} \cup \{(\mathrm{ht}\, H, \deg H) \mid H \subset G_x, H \neq 0\}$$

et s'écrit donc

$$x \longmapsto \text{enveloppe concave de } \{(0,0)\} \cup \{(\mathrm{ht}\, H, v(\delta_H(x))) \mid H \in A \setminus \{0\}\}$$

□

7.2. **La filtration de Harder-Narasimhan en famille.**

Théorème 4. *Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{O}_F$-schéma formel admissible quasicompact réduit et G un schéma en groupe fini et plat sur $\mathfrak{X}$. Soient $0 < h_1 < \cdots < h_k < \mathrm{ht}(G)$ des entiers tels qu'en tout $x \in |\mathfrak{X}^{an}|$ le polygone $\mathcal{P}(G_x)$ possède un point de rupture en les abscisses h_i, $1 \leq i \leq k$. Cela définit donc en tout $x \in |\mathfrak{X}^{an}|$ une unique filtration de G_x dont la filtration de Harder-Narasimhan est un raffinement. Alors, après un éclatement formel admissible de $\mathfrak{X}$, il existe une unique filtration de G pas des sous-schémas en groupes finis et plats sur $\mathfrak{X}$ induisant la filtration précédente en tout point de $\mathfrak{X}^{an}$.*

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soient H_1, H_2 des sous-groupes finis et plats de G tels que $\forall K|F,\ \forall x \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K),\ H_{1,x} = H_{2,x}$ comme sous-groupes de G_x. Considérons alors le morphisme de $\mathfrak{X}$-schémas en groupes finis et plats

$$H_1 \longrightarrow G/H_2.$$

Par hypothèse il est nul en tout point de $\mathfrak{X}^{an}$. Utilisant que H_1 et G/H_2 sont finis localement libres sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}$ réduit, on en déduit aisément que ce morphisme est nul. D'où l'unicité.

Passons à l'existence. Par récurrence il suffit de considérer le cas où il y a un seul cran dans la filtration que l'on veut mettre en famille. Notons donc h_1 l'abscisse associée. On peut supposer que l'on a un morphisme fini, rig-étale, surjectif en fibre générique,

$$f : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

tel que f^*G^{an} soit un groupe étale localement constant sur $\mathfrak{Y}^{an}$. Par platification par éclatements, quitte à faire un éclatement formel admissible de $\mathfrak{Y}$, on peut de plus supposer que les sous-groupes de f^*G^{an} s'étendent en des sous-groupes finis et plats de f^*G. Quitte à éclater $\mathfrak{Y}$ on peut supposer de plus que $\pi_0(\mathfrak{Y}^{an}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathfrak{Y})$. Soit $\mathfrak{U}$ une composante connexe de $\mathfrak{Y}$.

Soit $A(\mathfrak{U})$ l'ensemble fini des sous-groupes plats finis de $(f^*G)_{|\mathfrak{U}}$ de hauteur h_1. L'hypothèse sur les composantes connexes implique que pour tout $K|F$ et $y \in \mathfrak{U}^{an}(K)$,

$$A(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-groupes finis et plats de hauteur } h_1 \text{ de } (f^*G)_y\}.$$

Il y a donc une décomposition en union disjointe

$$\mathfrak{U}^{an} = \coprod_{H \in A(\mathcal{U})} \{y \in \mathfrak{U}^{an} \mid H_y \text{ est le cran de la filtration HN en l'abscisse } h_1\}.$$

On vérifie comme dans la démonstration du théorème 3 que chacun des membres de cette union disjointe est un ouvert de $\mathfrak{U}^{an}$. Par connexité de $\mathfrak{U}^{an}$ on en déduit que l'on peut étendre ce cran de la filtration de Harder-Narasimhan en un sous-groupe plat fini de $(f^*G)_{|\mathfrak{U}}$. En faisant varier $\mathfrak{U}$ on en déduit le même résultat sur tout $\mathfrak{Y}$.

Le morphisme $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ n'est plus nécessairement fini. Quitte à procéder à un éclatement formel admissible de $\mathfrak{X}$, d'après [7], on peut tout de même supposer que le morphisme $f : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est plat. Soit $H \subset f^*G$ le sous-groupe plat fini de f^*G précédent. Considérons le diagramme

$$\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y} \underset{pr_2}{\overset{pr_1}{\rightrightarrows}} \mathfrak{Y}.$$

Le morphisme f étant plat, $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y}$ est sans p-torsion (c'est donc un schéma formel admissible). Il est donc réduit puisque $\mathfrak{X}$ l'est et le morphisme $h : \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est rig-étale. Par la propriété d'unicité démontrée au début on en déduit que comme sous-groupes de h^*G,

$$pr_1^* H = pr_2^* H.$$

Par descente fidèlement plate on en déduit le résultat. □

8. Polygone de Harder-Narasimhan et polygone de Hodge

8.1. **Rappels sur le cristal de Dieudonné d'un schéma en groupes fini localement libre.** Soit $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et S un schéma sur lequel p est localement nilpotent ou bien plus généralement un Σ-schéma formel p-adique c'est à dire tel que $p\mathcal{O}_S$ soit un idéal de définition de S. Soit G un S-schéma en groupes fini localement libre,

$$\Delta(G) = \tau_{\leq 1} R\mathrm{Hom}(G, \mathcal{O}_{S/Z}) \in \mathbb{D}^{[0,1]}(\mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

son cristal de Dieudonné contravariant ([5], chapitre 3) et

$$\mathbb{D}(G) = \mathrm{Ext}^1(G, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

son cristal de Dieudonné. Le complexe $\Delta(G)$ est parfait de rang nul.

En fait, $\Delta(G)$ provient naturellement d'un objet de la catégorie dérivée filtrée $\mathbb{D}F^{[0,1]}(\mathcal{O}_{S/\Sigma})$ en considérant les $R\mathrm{Hom}$ filtrés de G vers $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ où G est filtré tautologiquement et $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ est muni de la filtration $J_{S/\Sigma} \subset \mathcal{O}_{S/\Sigma}$. Nous nous intéresserons essentiellement à l'évaluation de $\Delta(G)$ sur S,

$$\Delta(G)_S \in \mathbb{D}^{[0,1]}_{parf}(\mathcal{O}_S).$$

La filtration précédente évaluée sur S est alors la filtration de Hodge

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}\, \Delta(G)_S &= l_G[-1] \\ \Delta(G)_S / \mathrm{Fil}\, \Delta(G)_S &= l^\vee_{G^D}. \end{aligned}$$

Si $H_1 \longrightarrow H_2$ est une isogénie de groupes p-divisibles de noyau G le complexe filtré précédent est donné par

$$\begin{array}{ccc} \omega_{H_2} & \longrightarrow & \omega_{H_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Lie}\, E(H_2^D) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\, E(H_1^D) \end{array}$$

où pour H un groupe p-divisible on note $E(H)$ son extension vectorielle universelle.

Une suite exacte $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ de groupes finis localement libres induit un triangle

$$\Delta(G_3) \longrightarrow \Delta(G_2) \longrightarrow \Delta(G_1) \xrightarrow{+1}$$

De plus, si $(U, T, \delta) \in \mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ avec T un schéma formel p-adique sans p-torsion $H^0(\Delta(G)_{(U,T,\delta)}) = 0$ et dans ce cas là on obtient une suite exacte de $\mathcal{O}_T$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(G_3)_{(U,T,\delta)} \longrightarrow \mathbb{D}(G_2)_{(U,T,\delta)} \longrightarrow \mathbb{D}(G_1)_{(U,T,\delta)} \longrightarrow 0$$

Si S est sans p-torsion la suite exacte associée à la filtration est la suite

$$0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathbb{D}(G)_S \longrightarrow H^1(l^\vee_{G^D}) \longrightarrow 0.$$

Proposition 15. *Supposons G d'ordre une puissance de p. Le $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module cohérent $\mathbb{D}(G)$ est alors localement engendré par $\mathrm{ht}(G)$-éléments.*

Démonstration. Soit $(U, T, \delta) \in \mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ et $x \in T$. Il s'agit de montrer que

$$\dim_{k(x)} \left(\mathbb{D}(G)_{(U,T,\delta)}\right)_x \otimes k(x) \leq \mathrm{ht}(G).$$

Mais x définit un morphisme $(\mathrm{Spec}(k(x)) \xrightarrow{Id} \mathrm{Spec}(k(x))) \longrightarrow (U, T, \delta)$ dans $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$. Par la propriété de cristal

$$\left(\mathbb{D}(G)_{(U,T,\delta)}\right)_x \otimes k(x) = \mathbb{D}(G)_{\mathrm{Spec}(k(x))}.$$

On peut également étendre les scalaires à une clôture algébrique $\overline{k(x)}$ de $k(x)$,

$$\mathbb{D}(G)_{\mathrm{Spec}(k(x))} \otimes \overline{k(x)} = \mathbb{D}(G)_{\overline{k(x)}}$$

et dans ce cas là on est ramené à la théorie de Dieudonné classique ([5] chapitre 4). □

Corollaire 12. *Soit G d'ordre une puissance de p. Alors, ω_G est localement engendré par $\mathrm{ht}(G)$-éléments.*

Démonstration. Il y a un épimorphisme

$$\mathbb{D}(G^D)_S \twoheadrightarrow H^1(l_G^\vee)$$

et $\omega_G = H^0(l_G)$. □

8.2. **Le polygone de Hodge d'un groupe plat fini.** Soit $K|\mathbb{Q}_p$ une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ et G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$.

Définition 12. *On appelle polygone de Hodge de G le polygone à points de rupture entiers $\mathrm{Hdg}(G) : [0, \mathrm{ht}(G)] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall i \in [0, \mathrm{ht}(G)] \cap \mathbb{N}, \;\; \mathrm{Hdg}(G)(i) = \deg G - v(\mathrm{Fitt}_i\, \omega_G)$$

Utilisant le corollaire 12 on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Hdg}(G)(0) &= 0 \\ \mathrm{Hdg}(G)\big(\mathrm{ht}(G)\big) &= \deg G. \end{aligned}$$

Concrètement si $\omega_G \simeq \bigoplus_{i=1}^{\mathrm{ht}(G)} \mathcal{O}_K/a_i\mathcal{O}_K$ avec $v(a_1) \geq \cdots \geq v(a_n)$ alors

$$\forall i \geq 1, \;\; \mathrm{Hdg}(G)(i) = v(a_1) + \cdots + v(a_i)$$

et le polygone $\mathrm{Hdg}(G)$ est donc concave.

Exemple 5. *Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon 1 de dimension d et de hauteur h. Alors, $\mathrm{Hdg}(G)$ est le polygone ayant pour pentes 1 avec multiplicité d et 0 avec multiplicité $h - d$.*

Proposition 16. *Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension valuée complète pour une valuation discrète. Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{O}_F$-schéma formel localement formellement de type fini et G un $\mathfrak{X}$-schéma en groupes fini localement libre. Alors, l'application $x \longmapsto \mathrm{Hdg}(G_x)$ définie sur l'espace de Berkovich $|\mathfrak{X}^{an}|$ et à valeurs dans l'espace des polygones est continue. Elle vérifie la propriété de semi-continuité suivante lorsque l'on munit $\mathfrak{X}^{an}$ de la topologie des domaines analytiques compactes : pour tout polygone $\mathcal{P}$ l'ensemble des $x \in |\mathfrak{X}^{an}|$ tels que $\mathrm{Hdg}(G_x) \leq \mathcal{P}$ est un domaine analytique compact.*

Démonstration. On se ramène aisément au cas où $\mathfrak{X}$ est admissible au sens de Raynaud. Cela résulte alors de ce que pour $i \geq 0$ l'idéal $\mathrm{Fitt}_i(\omega_G)$ de $\mathcal{O}_\mathfrak{X}$ est cohérent et contient une puissance de p. □

8.3. **Position relative des polygones de Hodge et de Harder-Narasimhan.**

Théorème 5. *Le polygone de Hodge est au dessus du polygone de Harder-Narasimhan.*

Démonstration. Commençons d'abord par remarquer que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de R-modules de type fini alors $\forall n \geq 0$,

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0}} \mathrm{Fitt}_i M'.\mathrm{Fitt}_j M'' \subset \mathrm{Fitt}_n M.$$

Soit maintenant $G' \subset G$ un sous-groupe de G. Il induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{G/G'} \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \omega_{G'} \longrightarrow 0.$$

Donc,

$$\mathrm{Fitt}_{\mathrm{ht}(G')}\,\omega_{G'}.\mathrm{Fitt}_0\,\omega_{G/G'} \subset \mathrm{Fitt}_{\mathrm{ht}(G')}\omega_G$$

D'après le corollaire 12 on a $\mathrm{Fitt}_{\mathrm{ht}(G')}\omega_{G'} = \mathcal{O}_K$. On obtient donc

$$\mathrm{Fitt}_0\,\omega_{G/G'} \subset \mathrm{Fitt}_{\mathrm{ht}(G')}\omega_G.$$

qui fournit

$$v(\mathrm{Fitt}_{\mathrm{ht}(G')}\omega_G) \leq v(\mathrm{Fitt}_0\,\omega_{G/G'}) = \deg(G/G') = \deg(G) - \deg(G')$$

soit

$$\mathrm{Hdg}(G)\big(\mathrm{ht}(G')\big) \geq \deg(G').$$

Cela étant vrai pour tout sous-groupe G' le résultat se déduit alors de la proposition 7. □

9. Polygone de Hodge-Tate et comparaison avec le polygone de Harder-Narasimhan

9.1. **La catégorie des complexes de Hodge-Tate.** Soit $K|\mathbb{Q}_p$ une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ étendant celle de $\mathbb{Q}_p$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$.

Définition 13. *On note $\mathcal{C}$ la catégorie formée des triplets (M, ω, α) où*
- *M est un $\mathbb{Z}_p$-module de longueur finie muni d'une action linéaire discrète de G_K*
- *ω est un $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module de présentation finie de torsion muni d'une action semi-linéaire de G_K*
- *$\alpha : M \longrightarrow \omega$ est un morphisme $\mathbb{Z}_p$-linéaire G_K-équivariant*
- *On demande que $\mathcal{O}_{\overline{K}}.\alpha(M) = \omega$.*

La catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie exacte $\mathbb{Z}_p$-linéaire, sous-catégorie de la catégorie abélienne des triplets (M, ω, α) vérifiant les conditions de la définition précédente à l'exception de la dernière. Elle n'est pas abélienne.

Définition 14. *Pour $X = (M, \omega, \alpha) \in \mathcal{C}$ on note $\mathrm{ht}\, X = \mathrm{long}_{\mathbb{Z}_p} M \in \mathbb{N}$ et $\deg X = \mathrm{long}_{\mathbb{Z}_p} M - v(\mathrm{Fitt}_0\,\omega) \in \mathbb{R}$. Si $X \neq 0$ on pose $\mu(X) = \dfrac{\deg X}{\mathrm{ht}\, X} \in \mathbb{R}_+$.*

Les fonctions hauteur et degré précédentes sont additives sur $\mathcal{C}$.

Lemme 10. *Pour tout $X = (M, \omega, \alpha) \in \mathcal{C}$, $X \neq 0$, $\mu(X) \in [0, 1]$. De plus, $\mu(X) = 1 \Leftrightarrow \omega = 0$ et $\mu(X) = 0 \Leftrightarrow \alpha \otimes 1 : M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \omega$ est un isomorphisme.*

Démonstration. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\alpha \otimes 1) \longrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\overline{K}} \xrightarrow{\alpha \otimes 1} \omega \longrightarrow 0$$

on déduit que

$$\mathrm{long}\, M = v(\mathrm{Fitt}_0(M \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}})) = v(\mathrm{Fitt}_0 \ker(\alpha \otimes 1)) + v(\mathrm{Fitt}_0\,\omega).$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. □

Définition 15. *Soit $X = (M, \omega, \alpha) \in \mathcal{C}$. On note $X^D = (M^D, \omega^D, \alpha^D) \in \mathcal{C}$ où*
- *$M^D = Hom_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))$*
- *Si $W = \ker(\alpha \otimes 1 : M \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \omega)$, $\omega^D = Hom_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}(W, \overline{K}/\mathcal{O}_{\overline{K}}(1))$*
- *a^D est déduite de la transposée de l'inclusion $W \subset M \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}}$.*

En utilisant l'égalité donnée dans la démonstration du lemme 10 on obtient le lemme qui suit.

Lemme 11. *La correspondance $X \mapsto X^D$ induit une anti-équivalence exacte de $\mathcal{C}$ dans elle même. De plus $\mathrm{ht}\, X^D = \mathrm{ht}\, X$ et $\deg X^D = \mathrm{ht}\, X - \deg X$. En particulier si $X \neq 0$,*

$$\mu(X^D) = 1 - \mu(X)$$

Constatons maintenant qu'il y a un foncteur exacte fidèle "fibre générique"

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{p-tor}(G_K) \\ (M, \omega, \alpha) & \longmapsto & M \end{array}$$

tel que $\forall X \in \mathcal{C}$,

$$F : \{\text{sous-objets de } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-objets de } F(X)\}$$

l'inverse de la bijection précédente étant donné par un foncteur "d'adhérence schématique" qui, si $X = (M, \omega, \alpha)$, à $M' \subset M$ associe

$$(M', \mathcal{O}_{\overline{K}}.\alpha(M'), \alpha_{|M'}).$$

Le lemme qui suit se démontre immédiatement.

Lemme 12. *Soit $u : X \longrightarrow X'$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $F(u)$ soit un isomorphisme. Alors $\deg X \leq \deg X'$ avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme.*

Définition 16. *Un $X \in \mathcal{C}$ est dit semi-stable si pour tout sous-objet non-nul X' de X, $\mu(X') \leq \mu(X)$.*

Des considérations précédentes on déduit la proposition qui suit.

Proposition 17. *Tout $X \in \mathcal{C}$ possède une unique filtration de Harder-Narasimhan*

$$0 = X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X$$

telle que $\forall i, X_{i+1}/X_i$ soit semi-stable et

$$\mu(X_1/X_0) > \cdots > \mu(X_r/X_{r-1})$$

Si $\mathcal{P}$ est le polygone de Harder-Narasimhan associé à la filtration précédente, $\mathcal{P}$ est l'enveloppe concave des points $(\mathrm{ht}\, Y, \deg Y)$ lorsque Y parcourt les sous-objets de X.

La partie de pente 1 dans le polygone de Harder-Narasimhan correspond au noyau de l'application de Hodge-Tate $\alpha : M \longrightarrow \omega$: sa multiplicité est $\mathrm{long}_{\mathbb{Z}_p} \ker \alpha$.

La filtration de Harder-Narasimhan de X^D est

$$0 = (X/X_r)^D \subsetneq (X/X_{r-1})^D \subsetneq \cdots \subsetneq (X/X_0)^D = X^D$$

et le polygone associé à X^D est déduit de celui associé à X via la symétrie des pentes $\mu \mapsto 1 - \mu$.

Notons $\mathcal{C}_K$ la catégorie notée précédemment $\mathcal{C}$. Si $L|K$ est une extension valuée complète avec $L \subset \widehat{\overline{K}}$, il y a un foncteur d'oubli de l'action de Galois $\mathcal{C}_K \longrightarrow \mathcal{C}_L$. De plus, si $X \in \mathcal{C}_L$ et $\sigma \in G_K$ alors $\deg X^\sigma = \deg X$. Lorsque $L = \widehat{\overline{K}}$ la catégorie $\mathcal{C}_L$ est celle des triplets (M, ω, α) sans aucune action de Galois. De là on déduit que la filtration de Harder-Narasimhan vérifie la descente galoisienne au sens qui suit.

Lemme 13. *Si $X \in \mathcal{C}_K$ alors la filtration de Harder-Narasimhan de X s'envoie sur la filtration de Harder-Narasimhan de l'image de X dans $\mathcal{C}_L$ via le foncteur d'oubli de l'action de Galois $\mathcal{C}_K \to \mathcal{C}_L$. En particulier, en prenant $L = \widehat{\overline{K}}$ on voit que la filtration de Harder-Narasimhan de $X \in \mathcal{C}$ ne dépend pas de l'action de Galois.*

9.2. Lien entre le polygone de Harder-Narasimhan de G et son polygone de Hodge-Tate.

Définition 17. *Soit G un schéma en groupe fini et plat sur $Spec(\mathcal{O}_K)$. On note $\alpha_G : G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}}$ son application de Hodge-Tate. On appelle polygone de Hodge-Tate de G le polygone de Harder-Narasimhan du couple de Hodge-Tate $(G(\overline{K}), \mathrm{Im}\, \alpha_G \otimes 1, \alpha_G)$. On le note $\mathrm{HT}(G)$.*

Nous aurons besoin du lemme qui suit dans la suite.

Lemme 14. *Soient M un $\mathcal{O}_K$-module de présentation finie et $N \subset M$ un sous-module de type fini. Soit $r \geq 1$ un entier. Si M est engendré par r éléments alors N est engendré par moins de r éléments.*

Démonstration. Soient L un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang r et une surjection

$$f : L \twoheadrightarrow M.$$

Puisque N et $\ker f$ sont de type fini, de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow f^{-1}(N) \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

on déduit que $f^{-1}(N)$ est de type fini. Il existe donc une base $(e_1, \dots, e_r)$ de L et une collection $(a_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathcal{O}_K^r$ telles que $f^{-1}(N) = \mathcal{O}_K a_1 e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_K a_r e_r$. □

Théorème 6. *Supposons $p \neq 2$. Soit d le plus petit entier tel que ω_{G^D} soit engendré par d éléments, i.e. la plus petite abscisse associée à une pente zéro du polygone* $\mathrm{Hdg}(G^D)$*. Alors, pour tout $x \in [0, \mathrm{ht}\, G]$*

$$\mathrm{HN}(G)(x) - \frac{d}{p-1} \leq \mathrm{HT}(G)(x) \leq \mathrm{HN}(G)(x).$$

Démonstration. Soit $G' \subset G$ un sous-schéma en groupes fini et plat. Il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} G'(\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow{\alpha_{G'}} & \omega_{G'^D} \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow{\alpha_G} & \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}} \end{array}$$

D'après le théorème 7 qui suit $\mathrm{coker}(\alpha_{G'} \otimes 1)$ est annulé par $p^{1/(p-1)}$. De plus, d'après le lemme 14 précédent $\omega_{G'^D}$, puisqu'étant un sous-module de ω_{G^D}, est engendré par moins de d éléments. Donc,

$$\deg({G'}^D) \leq v(\mathrm{Fitt}_0 \mathrm{Im} \alpha_{G'} \otimes 1) \leq \deg({G'}^D) + \frac{d}{p-1}.$$

Utilisant la formule $\deg({G'}^D) = \mathrm{ht}\, G' - \deg(G')$ on en déduit le résultat. □

Théorème 7. *Supposons $p \neq 2$. Soit G un schéma en groupes plat fini sur $\mathcal{O}_K$. Le conoyau de l'application $\alpha_G \otimes 1 : G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}}$ est annulé par tout élément de valuation supérieure ou égale à $\frac{1}{p-1}$.*

Démonstration. Soit H un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$ et un plongement $G \subset H$. Soit $H' = H/G$. Il y a un diagramme commutatif à colonnes exactes

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p(H) & \xrightarrow{\alpha_H} & \omega_{H^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p(H') & \xrightarrow{\alpha_{H'}} & \omega_{H'^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow{\alpha_G} & \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\overline{K}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

D'après le théorème II.1.1 page 78 de [11] le conoyau de $\alpha_{H'} \otimes 1$ est annulé par tout élément de valuation supérieure ou égale à $\frac{1}{p-1}$. Le résultat s'en déduit. □

10. Filtrations de Harder-Narasimhan dans d'autres contextes

Nous avons étudié jusqu'à maintenant des filtrations sur les schémas en groupes finis et plats d'ordre une puissance de p sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ d'un corps valué K de caractéristique 0, pour une valuation étendant la valuation p-adique. Néanmoins les résultats des sections précédentes s'appliquent à d'autres contextes.

10.1. **Schémas réguliers de dimension** 1 **dont le point générique est de caractéristique** 0**.** Soit S un schéma noethérien régulier connexe de dimension 1 dont le point générique est de caractéristique 0. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des S-schémas en groupes finis et plats d'ordre une puissance de p. On définit la fonction hauteur $\mathrm{ht} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}$ comme précédemment. Soit $\mathrm{Div}(S)$ le groupe des diviseurs sur S, le groupe abélien libre sur les points fermés de S. Soit une fonction degré

$$\deg : \mathrm{Div}(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

un morphisme tel que $D \leq D' \Rightarrow \deg(D') \leq \deg(D)$ avec égalité si et seulement si $D = D'$. Se donner une telle fonction degré revient à fixer pour tout point fermé $x \in X$ un nombre $\deg[x] \in]0, +\infty[$. Composant cette fonction degré avec l'application additive

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Div}(S) \\ G & \longmapsto & \delta_G \end{array}$$

on obtient une fonction degré

$$\begin{array}{rcl} \deg : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ G & \longmapsto & \deg(\delta_G). \end{array}$$

On peut alors poser $\mu = \dfrac{\deg}{\mathrm{ht}}$. On a pour $G \in \mathcal{C}$, $G \neq 0$,

$$\mu(G) \in [0, \deg(\mathrm{div}\, p)]\,.$$

La catégorie $\mathcal{C}$ est stable sous l'involution de Cartier et

$$\mu(G^D) = \deg(\mathrm{div}\, p) - \mu(G).$$

On peut alors adapter dans ce cadre là les résultats des sections précédentes.

On remarquera que le diviseur δ_G est supporté par le fermé $V(p) \subset S$ et que donc la filtration de Harder-Narasimhan de G ne dépend que de la restriction de G à des ouverts de S contenant l'ensemble fini $V(p)$. En particulier l'étude de ces filtrations de ramène au cas où S est le spectre d'un anneau semi-local, quitte à remplacer S par le spectre de l'anneau $\varinjlim_{U \supset V(p)} \Gamma(U, \mathcal{O}_S)$.

Supposons maintenant que K soit un corps de nombres, $T \subset \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ un ensemble fini et $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \setminus T$. Supposons que le nombre premier p soit tel que $V(p\mathcal{O}_K) \cap T = \emptyset$. Normalisons la fonction degré en posant pour I un idéal non nul de $\mathcal{O}_K$

$$\deg(I) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \mathrm{long}_{\mathbb{Z}}\,(\mathcal{O}_K / I)$$

en particulier si $x \in V(p\mathcal{O}_K)$

$$\deg([x]) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]}\,[k(x) : \mathbb{F}_p].$$

Alors $\deg(\mathrm{div}\, p) = 1$ et donc pour $G \in \mathcal{C}$ non nul $\mu(G) \in [0, 1]$. De plus $\mu(G^D) = 1 - \mu(G)$. La normalisation précédente a de plus l'avantage que si $L|K$ est une extension finie alors $\mu(G) = \mu(G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L)$. Si $L|K$ est une extension galoisienne finie, T' est l'image réciproque de T dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$ on a pour G un schéma en groupes fini et plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L) \setminus T'$, $\deg(G) = \deg(G^\sigma)$. De cela on déduit comme dans la proposition 6 que pour $L|K$ finie et $G \in \mathcal{C}$ la filtration de Harder-Narasimhan de $G \otimes \mathcal{O}_L$ est obtenue par extension des scalaires de celle de G et que l'on a l'égalité de polygones $\mathrm{HN}(G) = \mathrm{HN}(G \otimes \mathcal{O}_L)$.

10.2. **Bases de caractéristique** p**.** Soit K un corps de caractéristique p valué pour une valuation non triviale v à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie exacte des schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ génériquement étales (c'est à dire étales après extension des scalaires à K) et d'ordre une puissance de p. On définit des fonctions additives degré et hauteur sur $\mathcal{C}$ comme précédemment et une fonction $\mu : \mathcal{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Contrairement au cas étudié précédemment la catégorie $\mathcal{C}$ n'est plus stable par dualité de Cartier et la fonction μ ne prend plus ses valeurs dans $[0, 1]$ en général. Mis à part cela tous les résultats des sections précédentes, hormis ceux de la section 9 et ceux

faisant intervenir la dualité de Cartier, restent valables dans ce contexte.

De la même façon les filtrations de Harder-Narasimhan s'étendent au cas des schémas en groupes finis et plats génériquement étales d'ordre une puissance de p sur un schéma noethérien régulier connexe de dimension 1 dont le point générique est de caractéristique p.

10.3. **Anneaux de valuation de hauteur supérieur.** Soit Γ est un groupe abélien totalement ordonné et K un corps muni d'une valuation non triviale $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{+\infty\}$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ d'ordre une puissance de p génériquement étales. Dans ce cadre la fonction degré est à valeurs dans Γ et la fonction pente μ dans $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$. Dans ce cadre les objets de $\mathcal{C}$ possèdent des filtrations de Harder-Narasimhan, le formalisme précédent s'adapte. De plus le polygone de Harder-Narasimhan de G est une fonction concave de $[0, \mathrm{ht}G] \cap \mathbb{Q}$ à valeurs dans $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$.

Si $F|\mathbb{Q}_p$ est une extension valuée complète pour une valuation discrète et $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement formellement de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$ on peut définir sa fibre générique $\mathfrak{X}^{ad} = t(\mathfrak{X})_a$ comme espace adique au sens de Huber sur $\mathrm{Spa}(F, \mathcal{O}_F)$. Alors si G est un schéma en groupes fini localement libre sur $\mathfrak{X}$ d'ordre une puissance de p en tout point $x \in \mathfrak{X}^{ad}$ le schéma en groupes spécialisé G_x sur $\mathrm{Spec}(K(x)^0)$ est muni d'une telle filtration.

Références

[1] Ahmed Abbes and Takeshi Saito. Ramification of local fields with imperfect residue fields. *Amer. J. Math.*, 124(5) :879–920, 2002.

[2] Leovigildo Alonso Tarrío, Ana Jeremías López, and Joseph Lipman. *Studies in duality on Noetherian formal schemes and non-Noetherian ordinary schemes*, volume 244 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[3] V. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.

[4] V. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390., 1996.

[5] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930. Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1982.

[6] S. Bosch and W. Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces. *Math. Ann.*, 295(2) :291–317, 1993.

[7] S. Bosch and W. Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques. *Math. Ann.*, 296(3) :403–429, 1993.

[8] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1998. Algèbre commutative. Chapitre 10. [Commutative algebra. Chapter 10], Profondeur, régularité, dualité. [Depth, regularity, duality].

[9] Brian Conrad. *Grothendieck duality and base change*, volume 1750 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[10] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 6((4)) :553–603, 1974.

[11] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in math., 262, pages 1–325. Birkhäuser, 2008.

[12] Laurent Fargues. Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *Duke Math. J.*, 140(3) :499–590, 2007.

[13] B. H. Gross and M. J. Hopkins. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[14] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20) :259, 1964.

[15] G. Harder and M. S. Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 212 :215–248, 1974/75.

[16] Robin Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[17] Luc Illusie. *Complexe cotangent et déformations. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[18] Luc Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes p-adiques*, number 223 in Astérisque, 1994.

[19] Finn Faye Knudsen and David Mumford. The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on "det" and "Div". *Math. Scand.*, 39(1) :19–55, 1976.

[20] David Masser and Gisbert Wüstholz. Isogeny estimates for abelian varieties, and finiteness theorems. *Ann. of Math. (2)*, 137(3) :459–472, 1993.

[21] M. Raynaud. Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$. *Bull. Soc. Math. France*, 102 :241–280, 1974.

[22] Michel Raynaud. Hauteurs et isogénies. *Astérisque*, (127) :199–234, 1985. Seminar on arithmetic bundles : the Mordell conjecture (Paris, 1983/84).

[23] J.P. Serre. *Corps locaux (troisiéme édition)*. Hermann.

[24] Stephen S. Shatz. The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles. *Compositio Math.*, 35(2) :163–187, 1977.

CNRS–université Paris-Sud Orsay

Laboratoire de mathématiques d'Orsay, bâtiment 425, université Paris-Sud 91405 ORSAY
E-mail address: laurent.fargues@math.u-psud.fr