Université Pierre et Marie Curie — 1M001 — Analyse et algèbre pour les sciences
Examen partiel du 3 décembre 2016 — Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique (tel que calculatrices, téléphones portables, montres connectées, etc.) est interdite. Ceux-ci doivent être rangés dans les sacs et mis en position éteinte.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet énoncé comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. Question de cours (on ne demande pas de démonstration)

— Donner la définition de la fonction $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$, en précisant son domaine de définition et son image.

Solution : La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on a $\mathrm{ch}[[0, +\infty[) = [1, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$, définie sur $[1, +\infty[$, dont l'image est l'intervalle $[0, +\infty[$.

— Quel est son sens de variation ?

Solution : La fonction $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$ est strictement croissante.

— En quelles valeurs de x est-elle continue ?

Solution : La fonction $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$ est continue sur $[1, +\infty[$.

— En quelles valeurs de x est-elle dérivable ?

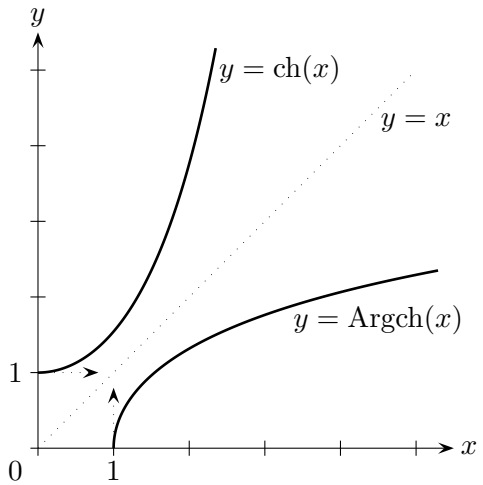
Solution : La fonction $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

— Quelle est sa dérivée ?

Solution : $\mathrm{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

— Représenter dans un même repère le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$ sur son domaine de définition. Comment ces deux graphes se déduisent-ils l'un de l'autre ?

Solution :



Les deux graphes se déduisent l'un de l'autre par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 2.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y' - 4y = 0$.

Solution : Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{4x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_1(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' - 4y = \cos(x)$.

Solution : On a $f_1'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ donc $f_1'(x) - 4f_1(x) = (b - 4a)\cos(x) - (a + 4b)\sin(x)$.
Pour que $f_1(x)$ soit solution de (E_1) il suffit que $b - 4a = 1$ et $a + 4b = 0$, c'est à dire : $b = \dfrac{1}{17}$ et $a = -\dfrac{4}{17}$.
La fonction $f_1(x) = -\dfrac{4}{17}\cos(x) + \dfrac{1}{17}\sin(x)$ est donc solution de (E_1).

3. Déterminer une solution particulière $f_2(x)$ de l'équation différentielle $(E_2) : y' - 4y = (x^2 + 1)e^{4x}$.

Solution : On cherche une solution de (E_2) de la forme $f_2(x) = \lambda(x)e^{4x}$.
On a alors $f_2'(x) = \lambda'(x)e^{4x} + 4\lambda(x)e^{4x}$ donc $f_2'(x) - 4f_2(x) = \lambda'(x)e^{4x}$.
Pour que $f_2(x)$ soit solution de (E_2) il suffit que $\lambda'(x) = x^2 + 1$.
La fonction $f_2(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + x\right)e^{4x}$ est donc solution de (E_2).

4. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' - 4y = \cos(x) + (x^2 + 1)e^{4x}$.

Solution : On obtient les solutions de (E) en additionnant les solutions de (E_0), (E_1) et (E_2). Ce sont donc les fonctions $\varphi_\lambda(x) = -\dfrac{4}{17}\cos(x) + \dfrac{1}{17}\sin(x) + \left(\dfrac{x^3}{3} + x + \lambda\right)e^{4x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Quelles sont les solutions de (E) qui prennent la valeur 1 en $x = 0$?

Solution : On a $\varphi_\lambda(0) = -\dfrac{4}{17} + \lambda$, donc $\varphi_\lambda(0) = 1$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{21}{17}$. Il y a donc une seule solution de (E) prenant la valeur 1 en $x = 0$; c'est la fonction $\varphi_{\frac{21}{17}}(x) = -\dfrac{4}{17}\cos(x) + \dfrac{1}{17}\sin(x) + \left(\dfrac{x^3}{3} + x + \dfrac{21}{17}\right)e^{4x}$

Exercice 3. Soient $P = X^2 - X + 1 + i \in \mathbb{C}[X]$ et $Q = X^4 - 2X^3 + (3 + 2i)X^2 - 2(1 + i)X + 2i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le discriminant Δ de P.

Solution : $\Delta = (-1)^2 - 4(1 + i) = -3 - 4i$.

2. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a + ib)^2 = \Delta$ et $a > 0$.

Solution : Si $(a + ib)^2 = \Delta$ alors : $\begin{cases} a^2 - b^2 = \mathcal{R}e(\Delta) = -3 \\ 2ab \quad = \mathcal{I}m(\Delta) = -4 \\ a^2 + b^2 = \quad |\Delta| \quad = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases}$
On a donc $a^2 = 1$ d'où $a = 1$ (car on demande $a > 0$) et $b = -2$ (car $ab = -2$).
Le nombre $a + ib$ cherché est donc $1 - 2i$.

3. Déterminer les racines de P.

Solution : Les racines de P sont $r_1 = \dfrac{1 + (1 - 2i)}{2} = 1 - i$ et $r_2 = \dfrac{1 - (1 - 2i)}{2} = i$.

4. Effectuer la division euclidienne de Q par P.

Solution :

$$\begin{array}{rl|l}
 & X^4 - 2X^3 + (3+2i)X^2 - 2(1+i)X + 2i & X^2 - X + 1 + i \\ \cline{3-3}
 & -(X^4 - X^3 + (1+i)X^2) & X^2 - X + 1 + i \\ \cline{2-2}
 & \quad - X^3 + (2+i)X^2 - 2(1+i)X + 2i & \\
 & -(- X^3 + X^2 - (1+i)X) & \\ \cline{2-2}
 & \quad (1+i)X^2 - (1+i)X + 2i & \\
 & -(\ (1+i)X^2 - (1+i)X + 2i) & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Le quotient est $X^2 - X + 1 + i = P$. Le reste est nul. On a donc $Q = P^2$.

5. Déterminer les racines de Q ainsi que leurs multiplicités et donner la factorisation de Q comme produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : Q a les même racines que P, avec multiplicité 2, et on a : $Q = (X-i)^2(X-1+i)^2$.

Exercice 4. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{x}$.

1. Quel est le domaine de définition de $f(x)$?
   $f(x)$ est-elle paire ? impaire ? continue ? dérivable ?

Solution : $f(x)$ est défini pour les valeurs de x telles que $x \neq 0$ et telles que $\tan(x)$ est défini et $\tan(x) \neq 0$, c'est à dire $x \in \mathbb{R}\backslash\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ qui est la réunion des intervalles $\left]\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$. C'est une fonction impaire. Elle est continue et dérivable (et même de classe C^∞) sur son domaine de définition, car elle est obtenue comme composée de fonction qui sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définition respectifs.

2. (a) Expliquer pourquoi $\tan(x)$ admet un développement limité à l'ordre 6, en $x = 0$, de la forme $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$.

Solution : $\tan(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et admet donc, d'après le théorème de Taylor-Young, un développement limité à l'ordre 6 en $x = 0$. C'est de plus une fonction impaire. Les coefficients des termes de degrés pairs de son développement limité sont donc nuls.

   (b) Déterminer alors a, b et c (on pourra pour cela utiliser la relation $\tan'(x) = 1 + \big(\tan(x)\big)^2$).

Solution : D'après le théorème de Taylor-Young, $\tan'(x) = 1 + \big(\tan(x)\big)^2$ admet un développement limité à l'ordre 5 en $x = 0$, pour lequel on a deux expressions qui se déduisent toutes les deux du développement limité de $\tan(x)$: $\tan'(x) = a+3bx^2+5cx^4+o(x^5) = 1+(ax+bx^3+cx^5)^2+o(x^5) = 1+a^2x^2+2abx^4+o(x^5)$. On a donc $a = 1$, $3b = a^2$ d'où $b = \dfrac{1}{3}$, et $5c = 2ab$ d'où $c = \dfrac{2}{15}$. Ainsi $\boxed{\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^6)}$.

   (c) En déduire un développement limité de $\dfrac{\tan(x)}{x}$ en $x = 0$.

Solution : $\dfrac{\tan(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^4)$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, en $x = 0$, de $\dfrac{x}{\tan(x)}$.

Solution : On a : $\dfrac{x}{\tan(x)} = \dfrac{1}{\frac{\tan(x)}{x}} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}$. En substituant u par $\dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)$ dans la formule $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ on obtient alors :
$\dfrac{x}{\tan(x)} = 1 - \left(\dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right) + \left(\dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o\left(\left(\dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right)^2\right)$ d'où $\boxed{\dfrac{x}{\tan(x)} = 1 - \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)}$.
Attention : le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$ donne :
$\dfrac{x}{\tan(x)} = 1 - \left(\dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right) + o\left(\dfrac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right) = 1 - \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^2)$. C'est un développement limité à l'ordre 2. C'est pourquoi on considère le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{1+u}$.
Autre solution : $\dfrac{x}{\tan(x)}$ est une fonction paire ; les coefficients des termes de degrés impairs de son développement limité sont donc tous nuls ; le développement limité à l'ordre 3 se déduit donc du développement limité à l'ordre 2, ce qui justifie que le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{1+u}$ suffit.

4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, en $x = 0$, de $f(x)$.

Solution : De la question précédente on déduit que $\dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3}x + o(x^2)$ d'où $\boxed{f(x) = -\dfrac{1}{3}x + o(x^2)}$.

5. Montrer que $f(x)$ admet un prolongement continu en $x = 0$. On notera $g(x)$ la fonction ainsi obtenue par prolongement de $f(x)$. Quelle est la valeur de $g(0)$?

Solution : On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $f(x)$ admet donc un prolongement continu en $x = 0$ obtenu en posant $\boxed{g(0) = 0 \text{ et } g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0}$.

6. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en $x = 0$? Si oui, quelle est la valeur de sa dérivée en $x = 0$?

Solution : $\dfrac{g(x) - g(0)}{x} = -\dfrac{1}{3} + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{3}$ donc $g(x)$ est dérivable en $x = 0$ et $\boxed{g'(0) = -\dfrac{1}{3}}$.

7. Reprendre les étapes 3. à 4., en augmentant l'ordre des développements limités, pour déterminer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 4 en $x = 0$.

Solution : On a : $\dfrac{x}{\tan(x)} = \dfrac{1}{\dfrac{\tan(x)}{x}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^5)}$. En substituant u par $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^5)$ dans la formule $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ on obtient alors :

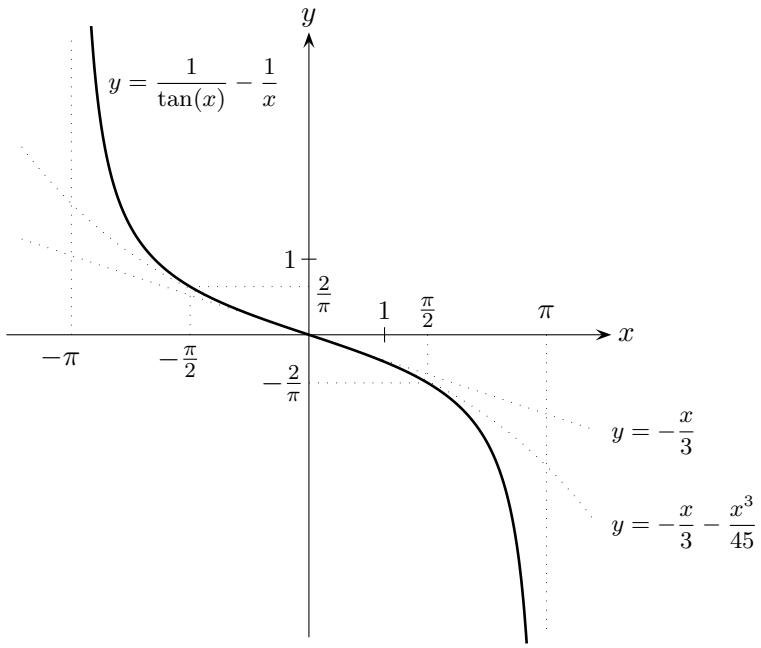
$$\frac{x}{\tan(x)} = 1 - \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)\right)^2\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \left(-\frac{2}{15} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + o(x^4).$$

Or $\dfrac{x}{\tan(x)}$ est une fonction paire ; les coefficients des termes de degrés impairs de son développement limité sont donc tous nuls ; le développement limité à l'ordre 5 se déduit donc du développement limité à l'ordre 4, d'où $\dfrac{x}{\tan(x)} = 1 - \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{45}x^4 + o(x^5)$.

On a alors $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{45}x^3 + o(x^4)}$.

En complément, voici le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

On notera que $f(x)$ se prolonge aussi par continuité en $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = -\dfrac{\pi}{2}$ car $\dfrac{1}{\tan(x)} \xrightarrow[x\to\pm\frac{\pi}{2}]{} 0$.



Pouvez vous montrer que $f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\pi, \pi[$ comme cela se lit sur la figure ?