Sorbonne Université — 1M001 — Analyse et algèbre pour les sciences
Examen du 8 janvier 2019 — Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique (tel que calculatrices, téléphones portables, montres connectées, etc.) est interdite. Ceux-ci doivent être rangés dans les sacs et mis en position éteinte.

Toutes les réponses doivent être justifiées, soit en indiquant qu'il s'agit d'un résultat du cours, soit par un raisonnement ou un calcul. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Exercice 1. — Question de cours

1.1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Application :

1.2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que $\big|\sin(b) - \sin(a)\big| \leq \big|b - a\big|$.

1.3. Soit $(a,b) \in [0,\pi]^2$ tel que $a < b$. Montrer que $\big|\sin(b) - \sin(a)\big| < \big|b - a\big|$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle (E) $y' - 2y = \sin(3x)e^{2x}$ et l'équation différentielle homogène associée (E_0) $y' - 2y = 0$.

2.1. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) définies sur $\mathbb{R}$.

2.2. Déterminer une solution particulière de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

2.3. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$.

2.4. Déterminer quelles sont les fonctions $f(x)$ solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ et telles que $f\big(\frac{\pi}{4}\big) = 0$.

Exercice 3.

Soit $\omega = -8i \in \mathbb{C}$.

3.1. Déterminer les racines carrées de ω sous forme cartésienne $a + ib$. (On exprimera a et b à l'aide de nombres entiers, de racines carrées de nombres entiers et de fractions.)

3.2. Déterminer les racines carrées de ω sous forme polaire $re^{i\theta}$.

Soit $P = X^2 - (2+4i)X + (-3+6i) \in \mathbb{C}[X]$.

3.3. Déterminer les racines complexes de P.

3.4. Exprimer P comme produit de deux polynômes de degré 1 à coefficients complexes.

Exercice 4.

4.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner le développement limité de $(1+x)^a$ en $x = 0$ à l'ordre 2.

4.2. Donner le développement limité de $f(x) = \sqrt{1+x} - e^{x/2}$ en $x = 0$ à l'ordre 2.

4.3. Déterminer les limites : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$ pour $n = 0, 1, 2$. En déduire les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^3}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x^3}$.

Exercice 5.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$ par $f(x) = \ln(\cos x)$.

5.1. La fonction f est-elle continue sur I ? dérivable sur I ? paire ? impaire ? (Justifier toutes les réponses.)

5.2. Déterminer la dérivée f' de f et tracer le graphe de f'. (On ne demande pas de faire une étude de f'. Se référer au cours sera suffisant.)

5.3. Déterminer les limites : $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$.

5.4. Déterminer le développement limité de $f(x)$ en $x = 0$ à l'ordre 4.

5.5. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur lequel on précisera les valeurs de $f'(0)$ et de $f(0)$ ainsi que les limites $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ calculées ci-dessus. Tracer ensuite le graphe de la fonction f.

5.6. Déterminer l'image $J = f(I)$ de l'intervalle I par la fonction f. La fonction f admet-elle une fonction réciproque définie sur J ?

On considère la fonction g obtenue par restriction de f à l'intervalle $I_1 = \big[0, \frac{\pi}{2}\big[$.

5.7. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera le domaine de définition J_1.

5.8. Tracer, sur le même graphique, les graphes des fonctions g et g^{-1}. On justifiera de quelle manière ces graphes sont obtenus.

5.9. Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

5.10. Déterminer la valeur de $\big(g^{-1}\big)'(-\ln 2)$.

5.11. Déterminer $g^{-1}(y)$ pour tout $y \in]-\infty, 0]$ puis $\big(g^{-1}\big)'(y)$ pour tout $y \in]-\infty, 0[$. Vérifier à l'aide de la formule obtenue le résultat de la question précédente.