

Analyse et algèbre pour les sciences

1M001

Novembre 2016

Ces notes sont issues du cours photocopié de l'UE LM110 – Fonctions (2004-2009, Sami Mustapha et un texte de l'Université en Ligne) et du cours photocopié de l'UE LM121 – Analyse vectorielle (2008-2009, Jacques Féjoz). Nous en avons extrait les chapitres (ou parties de chapitres) qui constituent le programme de l'UE 1M001 – Analyse et algèbre pour les sciences.

Table des matières

1	Généralités sur les fonctions numériques	5
1.1	Domaine de définition, graphe	5
1.2	Méthodes de définition	5
1.3	Majorations	6
1.4	Fonctions monotones	7
1.5	Fonctions paires et impaires, fonctions périodiques	7
2	Continuité et limites	9
2.1	Continuité en un point : Définition	9
2.2	Propriétés algébriques et composition	9
2.3	Limite en un point : Définition.	10
2.4	Opérations algébriques et composition	11
2.5	Limites à gauche et à droite	12
3	Dérivabilité	15
3.1	Définition	15
3.2	Fonctions de type ε	16
3.3	Opérations algébriques et composition	16
3.4	Fonction dérivable sur un intervalle, dérivées successives.	17
4	Développements limités	19
4.1	Définition	19
4.2	Formule de Taylor-Young	21
4.3	Développements limités usuels	23
4.4	Applications aux graphes	26
5	Fonctions continues sur un intervalle	29
5.1	Définition et propriétés	29
5.2	Théorème des valeurs intermédiaires	29
5.3	Image d'un intervalle fermé borné	31
6	Fonctions dérivables sur un intervalle	33
6.1	Extrema locaux, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis	33
6.2	Formule de Taylor-Lagrange, calculs d'erreurs	35
7	Fonctions réciproques	39
7.1	Injections, surjections, bijections	39
7.2	Fonctions réciproques et continuité	40
7.3	Théorème des fonctions réciproques	41
7.4	Représentation graphique	42

7.5	Les fonctions logarithme et exponentielle	42
7.6	La fonction Arctangente	42
7.7	La fonction Arcsinus	43
7.8	La fonction Arccosinus	44
8	Équations différentielles linéaires du premier ordre	45
8.1	Équations différentielles du premier ordre sans second membre	45
8.2	Équations différentielles du premier ordre avec second membre	46
9	Nombres complexes et polynômes	49
9.1	Nombres complexes	49
9.2	Trigonométrie	51
9.3	Factorisation des polynômes	55
9.4	Complément	58
10	L'espace réel à trois dimensions	61
10.1	Vecteurs de \mathbb{R}^3	61
10.2	Vecteurs libres ou liés	62
10.3	Droites et plans	64
10.4	Produit scalaire	66
10.5	Déterminant en petite dimension	68
10.6	Produit vectoriel	74

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions numériques

1.1 Domaine de définition, graphe

Soient X et Y deux ensembles. Une application $f : X \rightarrow Y$ est une loi qui, à tout élément x de X , associe un élément, noté $f(x)$, de Y . On dit que X est le *domaine de définition* (ou : la source) de l'application f . Le sous-ensemble $\{f(x); x \in X\}$ de Y s'appelle l'*image de f* , et est noté $f(X)$. Lorsque X est une partie de \mathbb{R} , et que $Y = \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction numérique, ou une fonction réelle d'une variable réelle. On note alors souvent $X = D$, ou D_f le domaine de définition de f . On résume ces données en posant

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$$

Il est très important, quand on considère une fonction, de bien préciser son domaine de définition. Dans la pratique, ce sera un intervalle, ou une réunion d'intervalles, de \mathbb{R} .

Beaucoup de propriétés d'une fonction f peuvent se voir sur son *graphe* :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)); x \in D\} \subset D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, le graphe de f est l'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 tels que x soit un élément de D et $y = f(x)$. Ce graphe rencontre la droite verticale d'équation $X = x_0$ en exactement un point si $x_0 \in D$, et en aucun point si $x_0 \notin D$. Ainsi, *un graphe rencontre une droite verticale en plus au plus un point*; en revanche, une droite horizontale, d'équation $Y = y_0$, peut rencontrer le graphe en plusieurs points : autant que l'équation $f(x) = y_0$ a de solutions en $x \in D$.

Il convient de bien distinguer les objets suivants : la fonction f (application), le nombre réel $f(x)$ et le graphe \mathcal{C}_f (partie de \mathbb{R}^2). Parler de la fonction $f(x) = \ln(1 - x)$ est un abus de langage, qui signifie : on regarde la plus grande partie $D = D_f$ de \mathbb{R} où f est interprétable naturellement (ici : $D =] - \infty, 1[$), et on considère la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \ln(1 - x)$.

[NB : le signe $A := B$ signifie que A est défini par B : par exemple, $a^2 := a \times a$. En revanche, le signe $=$ représente en général un énoncé mathématique : par exemple, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.]

1.2 Méthodes de définition

Dès que l'on connaît quelques fonctions, on peut en construire de (nombreuses) nouvelles en utilisant les procédés suivants :

Les opérations algébriques : si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle I ,

* la fonction $f + g$ est définie sur l'intervalle I par

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

* la fonction fg est définie sur l'intervalle I par

$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

* si la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I , la fonction f/g est définie sur l'intervalle I par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

La composition : soit f une fonction définie sur l'intervalle I et g une fonction définie sur l'intervalle J . On suppose en outre que l'image $f(I)$ de l'intervalle I par la fonction f est contenue dans J . La fonction *composée* des fonctions f et g est la fonction $g \circ f$ définie sur l'intervalle I par

$$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

La restriction : soit f une fonction définie sur l'intervalle I et soit J un intervalle contenu dans I . On appelle restriction de f à J et on note $f|_J$ la fonction définie sur J par $x \mapsto f|_J(x) := f(x)$. Autrement dit, les fonctions f et $f|_J$ prennent la même valeur en chaque point de l'intervalle J mais la fonction $f|_J$ n'est définie que sur cet intervalle alors que la fonction f est aussi définie aux points de I qui ne sont pas dans J . Ce ne sont donc pas les mêmes fonctions (si $J \subsetneq I$).

Le recollement : on définit une nouvelle fonction "par morceaux" c'est-à-dire par une formule dépendant du sous-intervalle dans lequel se trouve la variable. Par exemple, on peut définir une fonction en "deux morceaux" : à partir d'une fonction f_1 définie sur l'intervalle $[a, c[$ et d'une fonction f_2 définie sur l'intervalle $[c, b]$, on obtient une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$f(x) := f_1(x) \quad \text{si } a \leq x < c, \quad f(x) := f_2(x) \quad \text{si } c \leq x \leq b.$$

1.3 Majorations

Définition 1.3.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

* f est majorée (par M) sur I s'il existe un nombre réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout nombre réel x de I . Ou encore, en notation mathématique :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M.$$

* f est minorée (par m) sur I si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$.

* f est bornée sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I , c-à-d. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

Exemples :

1. Les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur \mathbb{R} car majorées par 1 et minorées par -1 .
2. La fonction exponentielle est minorée par 0 mais non majorée sur \mathbb{R} .
3. La fonction logarithme n'est ni majorée ni minorée sur $]0, \infty[$.

Définition 1.3.2. Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I . On dit que g majore f , ou que f minore g , si l'on a $f(x) \leq g(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle I . On écrira alors $f \leq g$.

Exemple 1. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction $x \rightarrow x - 1$ majore la fonction logarithme.

Exemple 2. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ la fonction $x \rightarrow \sin(x)$ est majorée par la fonction $x \rightarrow x$.

1.4 Fonctions monotones

Définition 1.4.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est * croissante (resp. décroissante) sur I si :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, (x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2))$$

$$(resp. \forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, (x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)))$$

* strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$$

$$(resp. \forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)))$$

* monotone (resp. strictement monotone) sur I si f est croissante ou décroissante sur I (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur I).

Remarque. Etudier les variations d'une fonction c'est partager son ensemble de définition en intervalles tels que, sur chacun d'eux, la fonction soit monotone.

Exemples

1. La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, \infty[$.

3. Les fonctions puissances $x \rightarrow x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \neq 0$) sont

* strictement croissantes si n est impair,

* si n est pair : strictement décroissantes (resp. croissantes) sur $] - \infty, 0]$ (resp. sur $[0, +\infty[$).

[NB : "resp." se lit : respectivement, et permet de regrouper deux énoncés sous une seule phrase.]

1.5 Fonctions paires et impaires, fonctions périodiques

Définition 1.5.1. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

* On dit que f est paire si, pour tout réel x , on a $f(-x) = f(x)$.

* On dit que f est impaire si, pour tout réel x , on a $f(-x) = -f(x)$.

Remarques.

1. Si f est impaire alors $f(0) = 0$.

2. Si f est paire (resp. impaire), alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe Oy (resp. par rapport à l'origine).

Les propriétés de parité permettent donc de réduire l'étude de la fonction à l'intervalle $[0, \infty[$: on trace alors la partie du graphe correspondante et on complète par la symétrie convenable.

Définition 1.5.2. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et T un nombre réel non nul. On dit que T est une période de f (ou que f est T -périodique) si, pour tout nombre réel x , on a $f(x + T) = f(x)$.

Par exemple, les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques. En tout point x de son domaine de

définition $D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}[$, la fonction \tan vérifie : $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.

Chapitre 2

Continuité et limites

2.1 Continuité en un point : Définition

Un rappel sur les suites numériques tout d'abord. Soit $(x_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels, et ℓ un nombre réel. On dit que la suite (x_n) converge vers ℓ , ou qu'elle admet ℓ pour limite, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N \implies |x_n - \ell| < \varepsilon,$$

c-à-d. si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N (dépendant en général de ε) tel que pour tout entier $n > N$, on ait $|x_n - \ell| < \varepsilon$. On vérifie aisément que si (x_n) admet un second nombre réel ℓ' pour limite, alors $\ell' = \ell$. On peut donc parler de *la* limite de cette suite, et on écrit : $\ell = \lim(x_n)$.

Définition 2.1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et soit a un point de I . On dit que f est continue en a si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

De façon imprécise, on peut dire qu'une fonction est continue en un point a de son domaine de définition si, lorsque la variable x "s'approche" de a , la valeur $f(x)$ de la fonction "s'approche" (pas forcément à la même vitesse) de $f(a)$. On peut alors dessiner le graphe de f dans un voisinage de a dans I "sans lever le crayon".

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue au point $a = 0$. La fonction $E : x \mapsto [x] :=$ partie entière de x ($=$ plus grand entier $\leq x$) est continue au point $a' = \frac{1}{2}$, mais pas au point

$a = 2$. En effet, la suite $(x_n = 2 - \frac{1}{n}; n \geq 1)$ converge vers $a = 2$ et vérifie $E(x_n) = 1$ pour tout $n > 1$, donc $\lim E(x_n) = 1$, qui n'est pas égal à $E(a) = 2$.

Voici le sens exact de l'expression *un voisinage de a dans I* : c'est une partie \mathcal{V}_a de I telle qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ pour lequel $]a - \delta, a + \delta[\cap I$ soit contenu dans \mathcal{V}_a . Pour étudier la continuité de f en a , il suffit d'étudier celle de sa restriction $f|_{\mathcal{V}_a}$ à un tel voisinage.

2.2 Propriétés algébriques et composition

Théorème 2.2.1. (continuité en un point et opérations algébriques). Soit f et g des fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point de I . Si f et g sont continues en a , alors les fonctions $f + g$ et fg sont définies sur I et continues en a . Si $g(a) \neq 0$, et si g est continue en a , la fonction $1/g$ est définie sur un voisinage de a dans I et est continue en a .

Preuve. Montrons par l'absurde que si $g(a) \neq 0$, il existe un voisinage de a dans I où g ne s'annule pas. S'il n'en était pas ainsi, il existerait, pour tout entier $n > 0$, un point x_n de

l'intervalle $]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[\cap I$ tel que $g(x_n) = 0$. Alors, la suite (x_n) tendrait vers a , donc la suite $(g(x_n))$ tendrait vers $g(a)$ par continuité de g en a . Or la suite $(g(x_n))$ est identiquement nulle, donc tend vers 0. Mais $g(a) \neq 0$ par hypothèse : c'est la contradiction recherchée. Les autres énoncés se déduisent facilement des résultats sur les limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.

Théorème 2.2.2. (*continuité des fonctions composées*) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit g une fonction définie sur un intervalle J qui contient $f(I)$. Si f est continue en un point a de I et si g est continue au point $f(a)$ (qui appartient à J par hypothèse), alors la fonction composée $g \circ f$ est définie sur l'intervalle I et continue en a .

Preuve. Les hypothèses sont destinées à assurer que la fonction composée $g \circ f$ est bien définie. La continuité elle-même est une conséquence immédiate de la définition.

Théorème 2.2.3. (*continuité des fonctions usuelles*)

Les fonctions usuelles : $x \rightarrow x$, la fonction logarithme \ln , la fonction exponentielle \exp , les fonctions trigonométriques \sin , \cos , \tan sont continues en tout point où elles sont définies.

Par conséquent

- Les fonctions polynômes $x \rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ (où n est un entier naturel et où les a_i sont des nombres réels) sont continues en tout point de \mathbb{R} .
- Les fractions rationnelles $x \rightarrow P(x)/Q(x)$ (où P et Q sont des polynômes et Q n'est pas identiquement nul) sont continues en tout point où le polynôme Q ne s'annule pas.
- soit α un nombre réel. La fonction puissance α -ième : $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie par la formule

$$x^\alpha := \exp(\alpha \ln x)$$

sur son domaine de définition $D =]0, +\infty[$. Les propriétés des fonctions composées montrent qu'elle est continue en tout point a de D . NB : si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, la formule précédente redonne la fonction usuelle x^n , dont le domaine de définition est \mathbb{R} si $n \geq 0$, et $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n < 0$. Pour $\alpha = \frac{1}{n}$ (avec n entier > 0) et $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}}$ est la racine n -ième $\sqrt[n]{x} > 0$ de x .

2.3 Limite en un point : Définition.

De nouveau, quelques rappels sur les suites numériques. On dit qu'une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ tend vers $+\infty$, ou qu'elle admet $+\infty$ comme limite, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N = N(A) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > N \implies x_n > A.$$

On écrit alors $\lim(x_n) = +\infty$. Définition similaire avec $-\infty$. L'ensemble des limites possibles de suites numériques est donc formé de tous les nombres réels $\ell \in \mathbb{R}$ (on parle alors de limite finie), et des symboles $+\infty, -\infty$. On pose :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\};$$

On notera que $\overline{\mathbb{R}}$ est aussi l'ensemble des "extrémités" des intervalles ouverts de \mathbb{R} .

On dit qu'une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ est *convergente* si elle admet une limite **finie**. Dans tous les autres cas, on dit qu'elle est *divergente*. Si $\lim(x_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$), on dit parfois qu'elle diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Définition 2.3.1. Soit D une partie de \mathbb{R} et soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que le point a est *adhérent* à D s'il existe une suite $(x_n; n \in \mathbb{N})$ de points de D qui tend vers a .

Exemples.

- * tout point a de D est adhérent à D (considérer la suite constante $x_n = a$).
- * Soient $a < b$ deux nombres réels. Alors, a est adhérent à l'intervalle $]a, b[$ (considérer la suite $(x_n = a + (b - a)/n, n > 1)$.)
- * $+\infty$ est adhérent à l'intervalle $]b, \infty[$. (considérer la suite $x_n = n$).

Définition 2.3.2. Soit f une fonction définie sur D et soit a un point adhérent à D . On dit que la fonction f a une limite quand x tend vers a s'il existe un élément λ de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que pour toute suite (x_n) d'éléments de D qui tend vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers λ .

Notation et terminologie. Le point λ de $\overline{\mathbb{R}}$ ainsi défini est alors unique. On dit que λ est la limite de f quand x tend vers a et on écrit :

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ ou encore : } \lambda = \lim_{x \in D, x \rightarrow a} f(x)$$

Exemples

- * Les fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ admettent toutes deux $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pour domaine de définition, dont $a = 0$ est un point adhérent. La fonction f n'admet pas de limite quand x tend vers 0 ; la fonction g admet $+\infty$ pour limite quand x tend vers 0.
- * $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$
- * $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- * la fonction \sin n'admet pas de limite quand x tend vers $+\infty$
- * la fonction \tan n'admet pas de limite quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$.
- * la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \tan(x)$ admet $+\infty$ pour limite qd x tend vers $\frac{\pi}{2}$.
- * la fonction $f :]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \tan(x)$ admet $-\infty$ pour limite qd x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Proposition 2.3.3. Soit f une fonction définie sur D et soit a un point de D . La fonction f a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a si et seulement si elle est continue au point a ; dans ce cas, on a : $\ell = f(a)$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate des Définitions 1 et 8.

2.4 Opérations algébriques et composition

Les théorèmes sur les limites de suites entraînent les théorèmes 4, 5, 6 suivants :

Théorème 2.4.1. (limites finies et opérations algébriques). Soit f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point adhérent à I . On suppose que les fonctions f et g ont des limites finies respectives l et m en a . Alors :

- * la fonction $f + g$ a une limite égale à $l + m$ en a ,
- * la fonction fg a une limite égale à lm en a ,
- * si la limite m n'est pas nulle, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la fonction f/g soit définie sur l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[\cap I$ et la fonction f/g a une limite égale à l/m en a .

Ce théorème s'étend dans certains des cas où l'une, au moins, des limites l ou m est infinie.

Théorème 2.4.2. (limites infinies et opérations algébriques). Soit f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point adhérent à I . Si les fonctions f et g ont des limites respectives $+\infty$ et m en a . Alors :

- * Si $m \neq -\infty$, la fonction $f + g$ a une limite égale à $+\infty$ en a ,
- * Si $m > 0$ ou si $m = +\infty$, la fonction fg a une limite égale à $+\infty$ en a ,
- * Si $m < 0$ ou si $m = -\infty$, la fonction fg a une limite égale à $-\infty$ en a ,
- * Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que la fonction $1/f$ soit définie sur l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[\cap I$ et la fonction $1/f$ a une limite égale à 0 en a .

Les cas où on ne peut pas conclure en utilisant ce théorème sont dits indéterminés. Ce sont les suivants : $\infty - \infty$, $\infty \times 0$, $0/0$ et ∞/∞ . La suite du chapitre présente les principales techniques qui permettent dans ce cas de dire s'il y a une limite, et de la calculer. On dit alors que l'on a "levé l'indétermination".

Théorème 2.4.3. (limite d'une fonction composée). Soit f une fonction définie sur un intervalle I , soit g une fonction définie sur un intervalle J qui contient $f(I)$ et soit a un point adhérent à I .

- Si la fonction f a une limite l en a , alors le point l est adhérent à J .
- Si, de plus, la fonction g a une limite m en l , alors la fonction $g \circ f$ a une limite égale à m en a .

2.5 Limites à gauche et à droite

Dans le but, en particulier, d'étudier la continuité des fonctions définies par recollement, on introduit la notion de limite à gauche et à droite.

Définition 2.5.1. (limite à gauche). Soient D une partie de \mathbb{R} , a un nombre réel adhérent à D , et f une fonction définie sur D . On dit que la fonction f a une limite à gauche quand x tend vers a si :

(i) a est adhérent à $D \cap]-\infty, a[$; c'est le cas, par exemple, si $D = [b, a]$, ou $D = [b, a[$, avec $b < a$.

(ii) la restriction g de la fonction f à $D \cap]-\infty, a[$ a une limite λ quand x tend vers a .

On note alors

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

On laisse au lecteur le soin de définir la notion de *limite à droite* de f en a ; notation (quand elle existe) : $\lambda = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Exemples

$$* \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty.$$

* pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ (applique le théorème 6).

Proposition 2.5.2. Soit f une fonction définie sur $D =]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. La fonction f a une limite quand x tend vers a si et seulement si elle a une limite à gauche et une limite à droite et si ces limites sont égales. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Ceci permet de relier la continuité d'une fonction à l'existence de limites à gauche et à droite :

Théorème 2.5.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un point de I . La fonction f est continue au point a si et seulement si elle a une limite à gauche et une limite à droite en ce point et si on a :

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Prolongement par continuité.

Le théorème 7 est particulièrement utile dans la situation suivante, proche du recollement introduit au §1.1.3. On part de deux fonctions f_1 , définie sur l'intervalle $[a, c[$, et f_2 , cette fois seulement définie sur l'intervalle $]c, b]$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow c^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f_2(x)$, et que cette limite commune est *finie*. Notons-la ℓ . Alors, il existe une unique fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue en c , et dont la restriction à $[a, c[$ (resp. $]c, b]$) coïncide avec f_1 (resp. f_2). Elle est définie par

$$f(x) := f_1(x) \text{ si } a \leq x < c, \quad f(c) := \ell, \quad f(x) := f_2(x) \text{ si } c < x \leq b.$$

On dit que f se déduit de $\{f_1, f_2\}$ par prolongement par continuité et recollement.

Plus simplement, partons d'une fonction $f_0 : [a, c[\cup]c, b] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\lim_{x \rightarrow c^-} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f_0(x)$, et supposons que cette limite commune, soit ℓ , est finie. Alors, il existe une unique fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue en c , et dont la restriction à $[a, c[\cup]c, b]$ coïncide avec f_0 (poser $f(c) = \ell$). On dit que f est *le prolongement par continuité* de f_0 au point c .

Chapitre 3

Dérivabilité

3.1 Définition

Définition 3.1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) et soit a un point de I . On dit que la fonction f est dérivable en a si la fonction $\tau = \tau_f$, définie sur le domaine $D = I \setminus \{a\}$ par :

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

à une limite finie en a . Dans ces conditions, la limite de la fonction τ en a s'appelle dérivée de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

(Pour l'interprétation graphique de cette notion, voir le §1.5.4.) On peut présenter cette définition sous une forme différente :

Définition 3.1.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) et soit a un point de I . On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe deux réels A et B tels que :

$$f(x) = A + B(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$$

où ε est une fonction continue et nulle en 0. On a alors $A = f(a)$ et $B = f'(a)$.

L'équivalence entre les deux définitions précédentes et les égalités $A = f(a)$ et $B = f'(a)$ se démontrent immédiatement si on définit la fonction ε comme le prolongement par continuité en 0 de la fonction

$$x \rightarrow \tau(x + a) - f'(a).$$

(Si $I = [b, c]$, cette fonction est définie sur $[b - a, 0[\cup]0, c - a]$.) On en déduit :

Proposition 3.1.3. Si la fonction f est dérivable en a , alors elle est continue en a .

La réciproque de cette proposition est fautive. Par exemple la fonction $x \rightarrow |x|$ est **continue** en 0 mais n'est **pas dérivable** en ce point.

Dérivée à droite, à gauche :

Si la fonction τ_f admet seulement une limite à droite en a (ce qui, rappelons-le, impose que a soit adhérent à $I \cap]a, +\infty[$), et si cette limite ℓ est finie, on dit que f est dérivable à droite ; le nombre $\ell := f'_d(a)$ s'appelle alors la dérivée à droite de f en a . Définition similaire pour la dérivée à gauche $f'_g(a)$, si elle existe.

Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0, et $f'_d(x) = 1$, $f'_g(x) = -1$. La fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est dérivable ni à gauche ni à droite en 0, car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau_f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \tau_f(x) = -\infty$.

Proposition 3.1.4. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]b, c[$ de \mathbb{R} , et soit a un point de $]b, c[$. On suppose que f est dérivable à droite et à gauche en a , et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. Alors, f est dérivable en a , de dérivée $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Preuve : appliquer la Proposition 2 du §1.3 à la fonction τ_f .

3.2 Fonctions de type ε

La définition 11 fait apparaître une notion (et une notation) qui sera utilisée de façon constante dans la suite du cours. Soit D une partie de \mathbb{R} contenant le point 0. On dit qu'une fonction f , définie sur D , est une fonction (de type) ε en 0 si $\lim_{x \in D, x \rightarrow 0} f(x) = 0$, c-à- d. si f est continue en 0 et s'annule en 0. On représente ces propriétés en écrivant

$$f(x) = \varepsilon(x).$$

Autrement dit, le symbole $\varepsilon(x)$ représente **n'importe quelle** fonction f continue en 0, et nulle en 0. Plus généralement, pour tout nombre réel a , le symbole $\varepsilon(x - a)$ représente n'importe quelle fonction f continue en a , et telle que $f(a) = 0$.

Par exemple, $|x| = \varepsilon(x)$, $\exp(x) - 1 = \varepsilon(x)$, $\ln(x) = \varepsilon(x - 1)$.

Si deux fonctions f, g définies sur D sont de type ε en 0, $f + g$ et fg le sont aussi, ce qui justifie les relations symboliques : $\varepsilon(x) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x)$, $(\varepsilon(x))^2 = \varepsilon(x)$. Si $f(x) = \varepsilon(x)$ et si g est une fonction *bornée* au voisinage de 0, on a encore : $(fg)(x) = \varepsilon(x)$.

Une relation du type $f(x) = \varepsilon(x - a)$ ne donne de renseignement sur f qu'au voisinage de a . En particulier, pour $a \neq b$, une expression de la forme $\varepsilon(x - a) + \varepsilon(x - b)$ n'a aucun sens (ou plus précisément : ne donne aucun renseignement).

Soit enfin $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en un point a de D , telle que $u(a) = 0$. Pour toute fonction f de type ε en 0, la fonction $f \circ u$ est continue en a et s'annule en a . Autrement dit : $(f \circ u)(x) = \varepsilon(x - a)$, et on peut écrire sans ambiguïté : $\varepsilon(u(x)) = \varepsilon(x - a)$. En particulier

$$\varepsilon(\varepsilon(x - a)) = \varepsilon(x - a).$$

3.3 Opérations algébriques et composition

Théorème 3.3.1. *(dérivabilité en un point et opérations algébriques). Soit f et g des fonctions définies sur le même intervalle I et soit a un point de I . Si f et g sont dérivables en a , alors les fonctions $f + g$ et fg sont dérivables en a et on a :*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si $g(a) \neq 0$, et si g est dérivable en a , la fonction $1/g$ est définie sur un voisinage de a dans I , est dérivable en a et l'on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Preuve Vérifions le dernier énoncé. Puisque g est dérivable en a , elle est continue en a , et le théorème 1 montre que $\frac{1}{g}$ est définie sur un voisinage \mathcal{V}_a de a dans I . Puisque g est dérivable en a , la fonction $\tau_g(x)$ admet $g'(a)$ pour limite en a . Or $\tau_{\frac{1}{g}}(x) = \frac{(1/g)(x) - (1/g)(a)}{x - a} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\tau_g(x)$, donc $\tau_{\frac{1}{g}}$ admet une limite finie en a , égale à $-\frac{g'(a)}{g(a)^2}$. On conclut par la Définition 10.

Voici une autre preuve, qui permettra de se familiariser avec le maniement des fonctions ε . On a : $g(x) = A + B(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$, avec $A = g(a) \neq 0, B = g'(a)$, d'où, pour $x \in \mathcal{V}_a$:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{A} \times \frac{1}{1 + (B/A + \varepsilon(x - a))(x - a)}.$$

Or $(1 + u)(1 - u) = 1 - u^2$, donc $\frac{1}{1 + u} = 1 - u + u\varepsilon(u)$. Les propriétés des fonctions de type ε entraînent :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{A} \left(1 - \frac{B}{A}(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a) \right) = \frac{1}{g(a)} - \frac{g'(a)}{g(a)^2}(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a)$$

(se souvenir que les notations $\varepsilon(x - a)$ apparaissant dans chaque terme peuvent représenter des fonctions différentes !). La Définition 11 permet de conclure.

Théorème 3.3.2. (*dérivabilité des fonctions composées*). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit g une fonction définie sur un intervalle J qui contient $f(I)$. Si f est dérivable en un point a de I et si g est dérivable au point $f(a)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et on a :

$$g \circ f'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Preuve. Nous allons ici détailler un peu plus, en désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, etc les fonctions de type ε apparaissant dans les différents termes du calcul. Posons $b = f(a)$. La dérivabilité de la fonction f en a s'écrit :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x - a),$$

où ε_1 est une fonction continue et nulle en 0. La dérivabilité de la fonction g en b s'écrit :

$$g(x) = g(b) + (x - b)g'(b) + (x - b)\varepsilon_2(x - b),$$

où ε_2 est une fonction continue et nulle en 0. En remplaçant x par $f(x)$ dans la deuxième formule, on trouve :

$$g(f(x)) = g(b) + ((x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x - a))g'(b) + ((x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon_1(x - a))\varepsilon_2(f(x) - b).$$

On remarque alors que, f étant continue en a , on a $f(x) - b = f(x) - f(a) = \varepsilon_3(x - a)$, ε_3 désignant une fonction continue et nulle en 0. Il en résulte que $\varepsilon_2(f(x) - b) = \varepsilon(x - a)$, où, suivant notre convention, ε désigne n'importe quelle fonction continue et nulle en 0.

Finalement en regroupant les termes qui contiennent à la fois un facteur $(x - a)$ et un facteur $\varepsilon(x - a)$ il vient :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(b) + (x - a)f'(a)g'(b) + (x - a)\varepsilon(x - a),$$

ce qui montre que la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et que $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

3.4 Fonction dérivable sur un intervalle, dérivées successives.

Définition 3.4.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point). On dit que la fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . On appelle alors fonction dérivée de f la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui, à chaque point a de l'intervalle I , associe le nombre réel $f'(a)$.

Remarque. Au lieu de f' on utilise également la notation différentielle $f' = \frac{df}{dx}$.

Dérivées successives

Si la fonction f est dérivable sur I et si sa dérivée f' elle-même est dérivable sur I , on dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I . La dérivée de f' s'appelle alors la dérivée seconde de f , et se note f'' . Plus généralement :

Définition 3.4.2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit, si c'est possible, la dérivée n -ième $f^{(n)}$ de f par la récurrence :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Ainsi on a $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. On utilise aussi la notation différentielle. $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Définition 3.4.3. Si f a une dérivée n -ième, on dit que f est n fois dérivable sur I . Si, pour tout entier n , f a une dérivée n -ième, on dit que f est indéfiniment dérivable sur I .

Exemples : les polynômes, les fonctions sinus, cosinus et l'exponentielle sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} , les fractions rationnelles sont indéfiniment dérivables sur tout intervalle qui ne contient pas de racine du dénominateur, les fonctions logarithme, racine carrée, puissance α -ième ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont indéfiniment dérivables sur $]0, \infty[$.

Chapitre 4

Développements limités

4.1 Définition

Définition 4.1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , soit a un point de I et soit n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a s'il existe des nombres réels c_0, c_1, \dots, c_n et une fonction ε continue et nulle en 0 tels que :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x - a),$$

pour tout nombre x de l'intervalle I . On écrit alors : f admet un dl_n en a .

Remarques.

1. Cette définition respecte la convention introduite au §1.4.2 de désigner par ε toute fonction continue et nulle en 0. Elle entraîne immédiatement [voir la Définition 11 pour le point (ii)] que :
(i) f admet un dl_0 en a si et seulement si f est continue en a (et alors, $c_0 = f(a)$ convient) ;
(ii) f admet un dl_1 en a si et seulement si f est dérivable en a (et alors, $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$.)

2. Quand x s'approche de a , c'est-à-dire quand $x - a$ devient petit, chacun des termes du développement limité devient négligeable devant le terme qui le précède. Plus précisément, c_0 est une constante, $c_1(x - a)$ devient petit, c'est-à-dire négligeable devant toute constante non nulle, $c_2(x - a)^2$ devient très petit, c'est-à-dire négligeable devant $(x - a)$, ..., idem pour $c_n(x - a)^n$ par rapport à $(x - a)^{n-1}$, et finalement $(x - a)^n \varepsilon(x - a)$ devient encore plus petit, c'est-à-dire négligeable devant $(x - a)^n$.

3. Plus généralement, étant donnés deux entiers k, m compris entre 0 et n , avec $k < m$, on a : $(x - a)^m = (x - a)^k (x - a)^{k-m} = (x - a)^k \varepsilon(x - a)$. Par conséquent, si f admet un dl_n en a , il admet un dl_k pour tout entier $k = 0, \dots, n$, donné par $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_k(x - a)^k + (x - a)^k \varepsilon(x - a)$. On dit que ce dl_k est obtenu en tronquant le dl_n à l'ordre k .

4. Même si le développement limité donne apparemment la valeur de la fonction en tout point de l'intervalle I , il ne faut pas oublier que l'on ne connaît aucune propriété de la fonction ε en dehors de sa limite en 0. C'est donc uniquement lorsque l'on recherche la limite en a d'une expression faisant intervenir la fonction f qu'il peut être avantageux de remplacer la fonction f par son développement limité en a .

5. Le terme $P(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n$ s'appelle la *partie principale* (ou : *régulière*) du développement limité. C'est un polynôme de degré n (ou $< n$ si $c_n = 0$). Comme on l'a vu dans la remarque 2, l'écriture de ce polynôme est adaptée à l'étude de ce qui se passe lorsque x tend vers a , et il ne faut pas développer les termes $(x - a)^k$. Par exemple, le coefficient c_0 donne la valeur du polynôme P au point a , le coefficient c_1 donne la dérivée de P en a , etc...

6. Le terme $(x - a)^n \varepsilon(x - a)$ s'appelle *le reste* du développement limité. Il est indispensable de l'écrire, puisqu'en l'oubliant, on affirmerait que la fonction f est un polynôme. Il indique la précision avec laquelle on veut connaître la fonction f au voisinage du point a , précision qu'il est parfois difficile de prévoir avant de faire les calculs explicites. Par exemple, pour montrer que la fonction $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$ admet une limite quand x tend vers 0, il ne suffit pas de savoir que $\cos x = 1 + \varepsilon(x)$ (développement limité à l'ordre 0), ni même que $\cos x = 1 + 0 \cdot x + x\varepsilon(x) = 1 + x\varepsilon(x)$ (dl_1); il faut, comme on dit, "pousser" le dl jusqu'à l'ordre 2 : on verra que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, donc $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \right) = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x)$, donc f a une limite quand $x \rightarrow 0$, égale à $-\frac{1}{2}$.

Théorème 4.1.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un point de I . Si f a un développement limité d'ordre n en a alors ce développement est unique. On peut donc alors parler du dl_n de f en a .*

Preuve. supposons que la fonction f admette deux développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon_1(x - a)$$

$$f(x) = d_0 + d_1(x - a) + \dots + d_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon_2(x - a),$$

où ε_1 et ε_2 sont deux fonctions de type ε . Nous devons montrer que leurs parties principales sont égales (ce qui entraînera d'ailleurs que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, mais peu importe). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors un indice $k \leq n$ tel que $c_k \neq d_k$, et on peut considérer le plus petit indice vérifiant cette propriété. Autrement dit : $c_i = d_i$ pour $i = 0, \dots, k - 1$, et $c_k \neq d_k$. En faisant la différence des deux expressions, on obtient :

$$0 = (c_k - d_k)(x - a)^k + (c_{k+1} - d_{k+1})(x - a)^{k+1} + \dots + (c_n - d_n)(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x - a).$$

D'où, pour $x \neq a$ et après division par $(x - a)^k$:

$$d_k - c_k = (c_{k+1} - d_{k+1})(x - a) + \dots + (c_n - d_n)(x - a)^{n-k} + (x - a)^{n-k} \varepsilon(x - a).$$

Or tous les termes du membre de droite sont de type $\varepsilon(x - a)$ (c'est clair si $n - k \geq 1$, mais aussi si $k = n$, le seul terme subsistant étant alors le dernier). Ainsi, $d_k - c_k = \varepsilon(x - a)$, ce qui impose que la constante $d_k - c_k$ soit nulle. Cela contredit l'hypothèse $c_k \neq d_k$, et conclut la preuve.

Exemple 0. Développement limité de $\frac{1}{x}$ en $a > 0$.

La fonction $x \mapsto 1/x$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Nous allons en trouver le développement limité en un point $a > 0$.

Première étape : dl_n de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - x}$ en 0.

La formule classique donnant la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

se réécrit :

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \frac{x}{1 - x}.$$

Comme $\frac{x}{1 - x}$ est une fonction de type $\varepsilon(x)$ au voisinage de 0, cela donne bien le dl_n de $\frac{1}{1 - x}$ en 0.

Deuxième étape : $x = a + t$

Une méthode générale pour obtenir le développement limité d'une fonction en un point a est de se ramener à un développement limité en 0 en posant $x = a + t$, de telle sorte que t tende vers 0 lorsque x tend vers a .

En utilisant le développement qui vient d'être trouvé, on obtient :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+t} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1 - \frac{-t}{a}} = \frac{1}{a} \left(1 + \left(\frac{-t}{a}\right) + \left(\frac{-t}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-t}{a}\right)^n + \left(\frac{-t}{a}\right)^n \varepsilon\left(\frac{-t}{a}\right) \right)$$

c'est-à-dire finalement :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a^3}(x-a)^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a).$$

4.2 Formule de Taylor-Young

On résume l'important énoncé qui suit en disant qu'on peut intégrer terme à terme un développement limité.

Proposition 4.2.1. (*intégration des développements limités*) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un point de I . Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' a un développement limité d'ordre n en a :

$$f'(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

alors f a un développement limité d'ordre $n+1$ en a dont la partie principale est la primitive de la partie principale du développement limité de f' qui prend la valeur $f(a)$ en a :

$$f(x) = f(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x-a).$$

Preuve : elle repose sur le théorème des accroissements finis, dont on trouvera l'énoncé au chapitre II, §2.2.1. Bien que nous n'établirons ce théorème qu'au chapitre II, le lecteur inquiet (à juste titre) pourra vérifier que sa démonstration ne fait appel à aucune des notions qui vont suivre, et qu'il n'y a donc pas de cercle vicieux.

Pour prouver la Proposition 5, posons

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \right)$$

et montrons que

$$g(x) = (x-a)^{n+1} \varepsilon(x-a).$$

La fonction g est dérivable sur I , de dérivée

$$g'(x) = f'(x) - c_0 - c_1(x-a) - \dots - c_n(x-a)^n = (x-a)^n \varepsilon(x-a).$$

Pour $x > a$, la fonction g est continue sur l'intervalle $[a, x]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, x[$ (et même sur $[a, x]$, mais peu importe). D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc un nombre $c = c(x)$ de l'intervalle $]a, x[$ tel que :

$$g(x) = (x-a)g'(c) = (x-a)(c-a)^n \varepsilon(c-a) = (x-a)^{n+1} \frac{(c-a)^n}{(x-a)^n} \varepsilon(c-a),$$

où $\varepsilon(c-a)$ désigne la fonction $x \mapsto \varepsilon(c(x)-a)$. Idem pour $x < a$, en remplaçant $[a, x]$ par $[x, a]$. Or le point c reste compris entre a et x . On en déduit d'une part que

$$0 < \left| \frac{(c-a)^n}{(x-a)^n} \right| < 1$$

et d'autre part que $c = c(x)$ tend vers a lorsque x tend vers a et donc, par composition des limites, que $c(x) - a$ tend vers 0. Autrement dit, la fonction $x \mapsto c(x) - a$ est de type $\varepsilon(x-a)$. Il en résulte finalement que :

$$\frac{(c-a)^n}{(x-a)^n} \varepsilon(c-a) = \varepsilon(x-a),$$

ce qui achève la démonstration.

Exemple 1. Développement limité de la fonction logarithme.

On intègre le développement limité d'ordre $n-1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x).$$

Une primitive de $\frac{1}{1-x}$ est $-\ln(1-x)$, fonction qui s'annule pour $x=0$. Il vient donc :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

En changeant x en $-x$ on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

Théorème 4.2.2. (formule de Taylor-Young) Soit n un entier ≥ 1 . Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I . Si f est n fois dérivable en a , alors f admet un développement limité d'ordre n en a , donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a).$$

Rappelons que pour $n \geq 2$ et par définition, si la fonction f est n -fois dérivable en a , elle est nécessairement $(n-1)$ -fois dérivable dans un voisinage de a dans I , et qu'on désigne par $f^{(i)}$ la dérivée i -ème de f .

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$, notons \mathcal{P}_n l'assertion dont le théorème 11 affirme l'exactitude. Nous allons démontrer que \mathcal{P}_n est vraie par récurrence sur n .

Première étape ($n=1$) : démontrons que \mathcal{P}_1 est vraie.

Soit f une fonction (une fois) dérivable en a . D'après l'équivalence des Définitions 10 et 11,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x-a).$$

Autrement dit, f admet un développement limité d'ordre 1 en a de la forme annoncée.

Deuxième étape : soit n un entier ≥ 2 . Admettons que \mathcal{P}_{n-1} soit vraie (et ce, pour toute fonction f qui est $(n-1)$ -fois dérivable en a).

Troisième étape : déduisons-en que \mathcal{P}_n est vraie.

Soit f une fonction n -fois dérivable au point a . Alors, sa dérivée f' est $(n-1)$ -fois dérivable en a . D'après l'hypothèse de récurrence (2e étape), elle a un développement limité d'ordre $n-1$ en a , donné par :

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}\varepsilon(x-a).$$

(la i -ème dérivée de f' est la $(i+1)$ -ème dérivée de f). Il suffit d'intégrer ce développement limité pour obtenir le dl_n de f en a , qui correspond bien à la formule cherchée.

4.3 Développements limités usuels

Outre ceux de $\frac{1}{1-x}$ et de $\ln(1+x)$ au point 0 (Exemples 0 et 1), voici ceux qu'il convient de connaître, ou au moins, de savoir reconstituer rapidement.

Exemple 2. Développement limité de la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle $\exp(x) := e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} , et égale à sa dérivée. Elle est donc indéfiniment dérivable, et vérifie $\exp^{(n)}(a) = \exp(a)$ pour tout $n \geq 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$. Par conséquent, son dl_n en a est donné par

$$\exp(x) = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a).$$

En particulier, pour $a = 0$, on a : $e^0 = 1$, et le dl_n de \exp en 0 est :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

On peut d'ailleurs déduire le dl_n en a de celui en 0 au moyen de l'équation fonctionnelle vérifiée par l'exponentielle : posant $x = a + t$, on a

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \exp(a+t) = \exp(a)\exp(t) = e^a \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t) \right) \\ &= e^a \left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\varepsilon(x-a) \right). \end{aligned}$$

Exemple 3. Développement limité des fonctions sinus et cosinus.

En itérant les relations différentielles $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$, et en rappelant les valeurs $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, on déduira :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x), \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Les formules trigonométriques

$$\sin(a+t) = \sin(a)\cos(t) + \cos(a)\sin(t)$$

$$\cos(a+t) = \cos(a)\cos(t) - \sin(a)\sin(t)$$

permettent, en posant $x = a + t$, d'en déduire les $d\ell_n$ de ces fonctions en un point a quelconque.

Exemple 4 : Formule du binôme généralisé (Développement limité de $(1+x)^\alpha$ en 0).

Soient α un nombre réel. On va chercher le développement limité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$, qui est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.

Les dérivées successives de la fonction f en 0 sont données par :

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \dots \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n};$$

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad \dots \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

La formule de Taylor-Young s'écrit alors :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

Lorsque $\alpha = m$ est un entier > 0 , et qu'on choisit pour ordre du $d\ell$ un entier $n \geq m$, on retrouve la formule du binôme de Newton classique :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{m!}{k!(m-k)!}x^k + \dots + x^m.$$

Dans ce cas la fonction ε est identiquement nulle.

Lorsque $\alpha = -1$, on retrouve la formule de l'exemple 0 (remplacer x par $-x$).

Lorsque $\alpha = 1/2$ et, par exemple, $n = 4$, on trouve :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

Tableau récapitulatif.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

De plus, on étudiera au chapitre II, §2.3.5, les fonctions réciproques *arctan*, *arcsin*, dont les développements limités en 0 sont donnés par

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2^2.2} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

On les établit facilement en intégrant terme à terme les $d\ell_{2n}$ en 0 de leurs dérivées, qui sont respectivement égales à :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour la recherche d'autres $d\ell_n$, on conduira les calculs en gardant en tête les remarques suivantes.

Remarques

1. Parité. Soit f une fonction paire admettant un $d\ell_n$ au point 0. Alors, tous les coefficients c_{2k+1} d'indices impairs de son $d\ell_n$ en 0 sont nuls. En effet, les fonctions $f(x)$ et $f(-x)$ sont égales, donc les parties principales de leurs $d\ell_n$ en 0 sont égales :

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = c_0 - c_1x + c_2x^2 + \dots + (-1)^n c_nx^n,$$

de sorte que chaque coefficient d'indice impair est égal à son opposé, donc nul. En particulier, si n est impair, par exemple $n = 5$, le $d\ell_5$ de f prendra la forme $f(x) = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + x^5\varepsilon(x)$.

De même, si f est une fonction impaire, tous les coefficients c_{2k} d'indice pair de son $d\ell_n$ en 0 sont nuls. En particulier, si f admet un $d\ell_6$ en 0, celui-ci prendra la forme $f(x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + x^6\varepsilon(x)$.

2. Opérations algébriques et composition de $d\ell$ en 0. Lors de telles opérations, on choisit un ordre de reste (on doit parfois pousser les $d\ell$ à un ordre n plus grand que celui auquel on veut aboutir). Une fois ce choix fait, il est inutile de conserver des termes d'ordre plus grand que n . En effet,

$$\forall p > n, x^p + x^n\varepsilon(x) = x^n\varepsilon(x) \text{ et } \forall p \geq n, x^p\varepsilon(x) + x^n\varepsilon(x) = x^n\varepsilon(x)$$

Lors de composition de fonctions faisant apparaître des expressions du type $\varepsilon(u(x))$ au voisinage de $x = 0$, on ne peut espérer aboutir que si $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$. Si une telle fonction u admet un $d\ell$ en 0, et qu'on doive étudier un terme de la forme $u^k\varepsilon(u)$, il est utile de connaître le premier terme non nul du $d\ell$ de u . En effet, si $u(x) = c_r x^r + \dots + x^m\varepsilon(x)$ avec $r \geq 1$, alors, $u^k\varepsilon(u) = x^{kr}\varepsilon(x)$. En revanche, cette information ne permet en général pas de raffiner la relation $\varepsilon(u) = \varepsilon(x)$: par exemple, si $u(x) = x^r$, il se peut que $\varepsilon(x) = |x|^{\frac{1}{2r}}$, et on aura seulement $\varepsilon(u(x)) = \sqrt{|x|}$, qui tend bien vers 0, mais moins vite que x , donc n'est pas de la forme $x\varepsilon(x)$.

Exemple 5 : $d\ell_6$ de la fonction tangente en 0

Comme la fonction \tan est indéfiniment dérivable en 0, elle admet un $d\ell$ en 0 d'ordre arbitrairement grand, et en particulier, un $d\ell_6$. Mais \tan étant une fonction impaire, celui-ci se déduira de son $d\ell_5$ en 0. On a :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)\right) \times \frac{1}{1-u(x)}, \text{ où } u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x). \text{ Donc } u^2(x) = \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon(x), u^3(x) = x^5\varepsilon(x) \text{ et } \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\varepsilon(u) = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{4}\right)x^4 + x^5\varepsilon(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\varepsilon(x)\right) \\ &= x + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + x^5\varepsilon(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x). \end{aligned}$$

On en déduit par parité que

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x).$$

3. Raccordement de $d\ell_n$

Définition 4.3.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b, c[$ (resp. $]b, c]$) de \mathbb{R} , et soit a un point de cet intervalle. On dit que la fonction f a un développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en a si sa restriction g (resp. h) à l'intervalle $[a, c[$ (resp. $]b, a]$) a un développement limité d'ordre n en a .

On déduit du §1.1.3, théorème 7 :

Proposition 4.3.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b, c[$ de \mathbb{R} , et soit a un point de $]b, c[$. La fonction f a un développement limité d'ordre n en a si et seulement si elle a un développement limité d'ordre n à gauche en a et un développement limité d'ordre n à droite en a , et si ces deux développements limités sont égaux (c'est-à-dire s'ils ont les mêmes parties principales).

4.4 Applications aux graphes

Les développements limités servent essentiellement à calculer des **limites**. On en a vu un exemple élémentaire à la Remarque 6 du §1.5.1. Les feuilles de TDs en fournissent beaucoup d'autres - et de plus approfondis.

Les développements limités permettent également de préciser l'allure d'un graphe au voisinage d'un de ses points. Plus précisément, soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, a un point de I , d'image $f(a)$, et $\mathcal{C} := \mathcal{C}_f$ le graphe de f (voir §1.1.1). Ce graphe passe alors par le point $A = (a, f(a))$ d'abscisse $x_A = a$, d'ordonnée $y_A = f(a)$, du plan \mathbb{R}^2 .

Dans ce qui suit, on suppose que la fonction f est **dérivable** au point a . La relation $\lim_{x \rightarrow a} \tau_f(x) = f'(a)$ s'exprime géométriquement en disant que les sécantes (AP) au graphe, c'est-à-dire les droites joignant A à un point quelconque $P = (x, f(x))$ de \mathcal{C} , "admettent une limite" quand le point P se rapproche de A en restant sur le graphe. En effet, la pente $\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}$ d'une telle sécante est précisément le taux de variation $\tau_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ de f entre a et x . La droite limite, qu'on note $T_A(\mathcal{C})$, a pour pente la limite $f'(a)$ des pentes des sécantes, et puisqu'elle passe par A , son équation est donnée par

$$Y = f(a) + f'(a)(X - a) \quad (T_A(\mathcal{C})).$$

On appelle $T_A(\mathcal{C})$ la (droite) **tangente** au graphe \mathcal{C} au point A .

1) Position du graphe par rapport à la tangente.

Considérons, pour $x \in I$ proche de a , la droite verticale d'équation $X = x$. Elle rencontre le graphe \mathcal{C} au point P d'abscisse $x_P = x$, d'ordonnée $y_P = f(x)$, et la tangente $T_A(\mathcal{C})$ au point Q d'abscisse $x_Q = x$, d'ordonnée $y_Q = (x, f(a) + f'(a)(x - a))$. La différence $y_P - y_Q$ fournit deux types de renseignements :

* par son signe : $y_P - y_Q$ est ≥ 0 si P est au-dessus de Q , c'est-à-dire si le graphe est au-dessus de la tangente pour cette valeur de x ; de même, $y_P - y_Q$ est ≤ 0 si P est au-dessous de Q , c'est-à-dire si le graphe est au-dessous de la tangente pour cette valeur de x ;

* par sa valeur absolue : $|y_P - y_Q|$ mesure de combien le graphe est éloigné de la tangente pour cette valeur de x .

Supposons maintenant que f admette un $d\ell_2$ en a , c-à-d. qu'il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + c_2(x - a)^2 + (x - a)^2\varepsilon(x - a),$$

et que, de plus, c_2 **soit non nul**. Alors,

$$y_P - y_Q = f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a)) = (x - a)^2(c_2 + \varepsilon(x - a)),$$

et pour $x \neq a$, le signe de $y_P - y_Q$ est égal à celui de $c_2 + \varepsilon(x - a)$. La proposition 7 qui suit montre alors que pour x suffisamment proche de a , le signe de $y_P - y_Q$ est égal au signe de c_2 . Par conséquent,

* si $c_2 > 0$, le graphe \mathcal{C} reste au-dessus de la tangente $T_A(\mathcal{C})$ dans un voisinage de a dans I .

* si $c_2 < 0$, le graphe \mathcal{C} reste au-dessous de la tangente $T_A(\mathcal{C})$ dans un voisinage de a dans I .

Lorsque c_2 est nul, on doit, si c'est possible, pousser le développement limité plus loin. Supposons que f admette un $d\ell_n$ en a , dont la partie principale ait un coefficient $c_i \neq 0$, avec $2 \leq i \leq n$, et notons r le plus petit de ces indices. Autrement dit,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + c_r(x - a)^r + \dots + c_n(x - a)^n + (x - a)^n\varepsilon(x - a)^n,$$

$$\text{donc : } y_P - y_Q = f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a)) = (x - a)^r(c_r + \varepsilon(x - a)),$$

On distingue alors deux cas :

** si r est pair : la situation est la même que pour $r = 2$: $(x - a)^r$ reste positif et la Proposition 7 montre que pour x suffisamment proche de a , le signe de $y_P - y_Q$ est égal à celui de c_r . Par conséquent, si $c_r > 0$ (resp. $c_r < 0$), le graphe \mathcal{C} reste au-dessus (resp. au-dessous) de la tangente $T_A(\mathcal{C})$ dans un voisinage de a dans I .

** si r est impair : alors, $(x - a)^r$ est négatif si $x < a$, et positif si $x > a$, tandis que d'après la Proposition 7, le signe de $c_r + \varepsilon(x - a)$ reste égal à celui de c_r pour x suffisamment proche de a . Supposons par exemple $c_r > 0$. Alors, le graphe \mathcal{C} est au-dessous de la tangente $T_A(\mathcal{C})$ pour $x < a$, et au-dessus pour $x > a$ (inverser les termes si $c_r < 0$). On dit que le graphe traverse sa tangente au point A , ou encore que A est un *point d'inflexion* du graphe \mathcal{C} .

Proposition 4.4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un point de I . On suppose que f a un développement limité d'ordre r en a de la forme :*

$$f(x) = c_r(x - a)^r + (x - a)^r\varepsilon(x - a)$$

avec $c_r \neq 0$. Alors, pour x suffisamment proche de a , $f(x)$ est du signe de $c_r(x - a)^r$.

Preuve : comme $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0$, il existe un voisinage \mathcal{V}_a de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V}_a$, on ait : $|\varepsilon(x - a)| < \frac{1}{2}|c_r|$. En effet (voir la preuve du théorème 1, §1.2.2), il existerait dans le cas contraire une suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ d'éléments de I tendant vers a tels que $|\varepsilon(x_n - a)| > \frac{1}{2}|c_r|$ pour tout n , et la suite $\varepsilon(x_n - a)$ ne convergerait pas vers $\varepsilon(0) = 0$.

Pour x dans \mathcal{V}_a , le nombre $c_r + \varepsilon(x - a)$ est donc compris entre $\frac{1}{2}c_r$ et $\frac{3}{2}c_r$; en particulier, il a le même signe que c_r , et $f(x)$ a le même signe que $c_r(x - a)^r$.

2) Asymptotes

Supposons que le domaine de définition de f contienne un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$ (le lecteur généralisera sans peine au cas où D_f contient $] - \infty, A[$). On dit qu'une droite Δ , d'équation $Y = mX + p$, est asymptote au graphe \mathcal{C} de f quand x tend vers $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - p) = 0.$$

Considérons de façon générale une fonction g , définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$, avec $A > 0$, et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. La fonction $G : t \mapsto G(t) := g(\frac{1}{t})$ est alors définie sur l'intervalle $]0, \frac{1}{A}[$, et admet 0 pour limite à droite en 0. Soit $\tilde{G} : I := [0, \frac{1}{A}[\rightarrow \mathbb{R}$ son prolongement par continuité en 0 : c'est une fonction continue en 0 et nulle en 0, autrement dit une fonction de type $\varepsilon(t)$ sur I . On s'autorise dans ces conditions à écrire

$$g(x) = \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, Δ est asymptote à \mathcal{C} quand x tend vers $+\infty$ si $f(x) - mx - p = \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Avec les notations g, G, \tilde{G} ci-dessus, supposons maintenant que \tilde{G} admette un $d\ell_n$ à droite en 0. Comme $\tilde{G}(0) = 0$, il sera de la forme $\tilde{G}(t) = c_1 t + \dots + c_n t^n + t^n \varepsilon(t)$. On dit alors que g admet un $d\ell_n$ quand x tend vers $+\infty$, et on écrit :

$$g(x) = \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \rightarrow +\infty.$$

Si c'est le cas de la fonction $f(x) - mx - p$, on écrit

$$f(x) = mx + p + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \rightarrow +\infty,$$

et on appelle cette expression un $d\ell_n$ généralisé d'ordre n de f pour x tendant vers $+\infty$.

Une discussion similaire au paragraphe précédent permet alors préciser la position de l'asymptote Δ par rapport au graphe \mathcal{C} . Supposons que l'un des coefficients c_i soit non nul, et soit $r \in [1, n]$ le plus petit indice vérifiant cette propriété. Alors (et quelle que soit la parité de r) :

- * si $c_r > 0$: \mathcal{C} est au-dessus de Δ pour $x \rightarrow +\infty$;
- * si $c_r < 0$: \mathcal{C} est au-dessous de Δ pour $x \rightarrow +\infty$.

(En revanche, la parité de r intervient quand on étudie \mathcal{C} pour $x \rightarrow -\infty$.)

Chapitre 5

Fonctions continues sur un intervalle

5.1 Définition et propriétés

Définition 5.1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que la fonction f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Les théorèmes de continuité en un point se traduisent immédiatement en théorème de continuité globale :

Théorème 5.1.2. (i) (continuité et opérations algébriques) Soit f et g des fonctions définies et continues sur un intervalle I . Les fonctions $f + g$ et fg sont définies et continues sur I . Si la fonction g ne s'annule pas sur I , la fonction $1/g$ est définie et continue sur I .

(ii) (continuité des fonctions composées). Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et soit g une fonction définie et continue sur un intervalle J qui contient $f(I)$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est définie et continue sur l'intervalle I .

(iii) (continuité des fonctions usuelles) Les fonctions polynômes et les fonctions \exp, \sin, \cos sont continues sur \mathbb{R} . La fonction \ln et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sont continues sur $]0, \infty[$.

Les fonctions construites à partir des fonctions usuelles par opérations algébriques et composition sont donc continues sur tout intervalle où elles sont définies. Par exemple, les fractions rationnelles $x \rightarrow P(x)/Q(x)$ sont continues sur tout intervalle où le polynôme Q ne s'annule pas ; la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est continue sur tout intervalle $]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}[$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Ces théorèmes permettent souvent de conclure à la continuité d'une fonction dans son domaine de définition, à l'exception éventuelle de quelques points pour lesquels on doit faire une étude directe locale. Par exemple, la fonction : $x \mapsto f(x) := x \sin(1/x), x \neq 0; f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus 0$, mais aussi en 0 (noter que $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), donc est continue sur \mathbb{R} .

5.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.2.1. (Théorème des valeurs intermédiaires - première forme) Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$ (c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas tous les deux > 0 , ou tous les deux < 0), alors il existe un point c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

L'hypothèse de continuité en tout point de $[a, b]$ est fondamentale. Par exemple, si $E(x) = [x]$ désigne la fonction "partie entière", la fonction $f(x) = E(x) + \frac{1}{2}$ est continue sur $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, vérifie $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2} < 0, f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} > 0$, mais ne s'annule en aucun point de $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Preuve. On se ramène aisément au cas où $f(a) \leq 0, f(b) > 0$. Construisons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ une suite croissante $(a_n, n \in \mathbb{N})$ et une suite décroissante $(b_n, n \in \mathbb{N})$ de nombres réels dans l'intervalle $[a, b]$, telles pour tout $n \geq 0$, on ait

$$a_n \leq b_n, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \text{ et } f(a_n) \leq 0, f(b_n) > 0.$$

Pour cela, on pose $a_0 = a, b_0 = b$, qui vérifient bien ces propriétés pour $n = 0$. Admettant les suites construites jusqu'à l'ordre n , on considère le milieu m_n de $[a_n, b_n]$. Si $f(m_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m_n$; si $f(m_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = m_n, b_{n+1} = b_n$. Dans tous les cas, a_{n+1} et b_{n+1} vérifient les propriétés demandées, et les suites $(a_n, n \in \mathbb{N}), (b_n, n \in \mathbb{N})$ répondent bien aux conditions imposées.

La suite (a_n) est croissante et majorée par b . D'après les propriétés générales des suites numériques, elle admet donc une limite finie $\alpha \leq b$. De même, la suite (b_n) , décroissante et minorée, admet une limite finie $\beta \geq a$. La suite $(b_n - a_n)$ admet donc pour limite $\beta - \alpha$; mais elle vaut $\frac{b-a}{2^n}$, qui tend vers 0. Donc $\alpha = \beta$. Notons $c \in [a, b]$ cette valeur commune des limites des deux suites.

Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle l'est au point c . Ce point étant la limite de la suite a_n , on a donc $\lim f(a_n) = f(c)$. De même, $\lim f(b_n) = f(c)$. Or $f(a_n) \leq 0$ pour tout n , donc la limite $f(c)$ de cette suite est ≤ 0 . De même, $f(b_n) > 0$ pour tout n , donc la limite $f(c)$ de cette suite est ≥ 0 . Ainsi, $f(c)$ est nécessairement nul. ■

[Le symbole ■ indique la fin d'une démonstration. On l'utilise pour les preuves assez longues. Il remplace le symbole, passé de mode : CQFD = ce qu'il fallait démontrer.]

Noter qu'il peut exister plusieurs valeurs de c telles que $f(c) = 0$ (en mathématiques, l'expression $\exists c \in [a, b], f(c) = 0$ signifie : l'équation $f(c) = 0$ admet *au moins une* solution c dans l'intervalle $[a, b]$). Il en va de même dans la version apparemment plus générale suivante du théorème 13 :

Théorème 5.2.2. (Théorème des valeurs intermédiaires - deuxième forme) *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout nombre réel γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un point c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Preuve : on se ramène au théorème 13 en considérant la fonction $F(x) = f(x) - \gamma$.

Le théorème 14 énonce que toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes comme valeurs de f , d'où son nom. En voici une 3e version. Rappelons qu'un intervalle de \mathbb{R} est par définition une partie I de \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset I,$$

c-à-d. : pour tout couple $x \leq y$ d'éléments de I , le segment $[x, y] := \{z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y\}$ est contenu dans I .

Théorème 5.2.3. (Théorème des valeurs intermédiaires - troisième forme) *Soient I un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur I . Alors, l'image $J := f(I)$ de f est un intervalle de \mathbb{R} .*

Preuve : montrons que le thm 14 entraîne le thm 15. Soient $x \leq y$ deux points de $J = f(I)$, et z un point de $[x, y]$. Par définition de l'image (voir le §1.1.1), il existe deux points a, b de I tels que $f(a) = x, f(b) = y$. D'après le théorème 14, il existe un point c du segment $[a, b]$ (ou $[b, a]$, si $b \leq a$) tel que $f(c) = z$. Donc z appartient bien à l'image $f(I)$ de f .

On laisse au lecteur le soin de montrer que le théorème 15 entraîne le théorème 13, et d'en déduire ainsi que les théorèmes 13, 14 et 15 sont bien équivalents.

Remarque : soit I un intervalle (non vide) d'extrémités $a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a \leq b$. On dit que I est *ouvert* s'il ne contient pas ses extrémités, autrement dit, si $I =]a, b[$. On dit que I est *fermé* s'il contient ses extrémités finies, autrement dit (en réservant les notations a, b aux éléments de \mathbb{R}), si $I = [a, b]$, ou $I =]-\infty, b]$, ou $I = [a, +\infty[$, ou $I =]-\infty, +\infty[$ (ce dernier intervalle est donc à la fois ouvert et fermé). On dit que I est *borné* si a et b sont tous les deux finis; les **intervalles fermés bornés** sont donc de la forme $[a, b]$ où a et b appartiennent à \mathbb{R} . Enfin, les intervalles semi-ouverts sont les intervalles de la forme $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$, ou $]a, b]$ avec $b \in \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle caractéristique de l'intervalle ce type de propriété.

Le théorème 15 ne dit rien des caractéristiques de J en fonction de celles de I : en effet, ces caractéristiques ne sont en général pas conservées par image par une fonction continue. Par exemple, l'image de l'intervalle ouvert $] - 2\pi, +2\pi[$ par la fonction continue \sin est l'intervalle fermé borné $[-1, +1]$. L'image de l'intervalle ouvert borné $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par la fonction \tan est l'intervalle fermé (et ouvert) non borné $] - \infty, +\infty[$.

Toutefois, si l'intervalle I est fermé et borné, son image par une fonction continue sera encore fermé et borné. Ceci est l'objet du très important *théorème de Weierstrass* suivant, dont nous admettrons la preuve.

5.3 Image d'un intervalle fermé borné

Théorème 5.3.1. (dit de Weierstrass, ou de l'image d'un intervalle fermé borné). *L'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné.*

Principe de la preuve. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. On sait d'après le théorème 15 que l'image $J := f([a, b])$ est un intervalle, qu'on note (m, M) , sans savoir encore le type des crochets que représentent les parenthèses, ni si m et M sont dans \mathbb{R} ou seulement dans $\overline{\mathbb{R}}$. On montre alors successivement les points suivants :

- m et M sont finis, autrement dit : $J = f([a, b])$ est un intervalle borné, ou encore : f est majorée et minorée sur l'intervalle $[a, b]$;
- $J := f([a, b])$ est un intervalle fermé. Puisque ses extrémités m et M sont finies, ils s'agit de voir que m et M appartiennent à J , autrement dit, qu'il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que $f(c_1) = m, f(c_2) = M$, ce qu'on exprime en disant que la fonction f atteint ses bornes m et M sur l'intervalle $[a, b]$.

On peut vérifier chacune de ces assertions en construisant des couples de suites adjacentes $(a_n), (b_n)$, par la méthode de "dichotomie" déjà vue lors de la preuve du théorème 13. En les combinant, on conclut que $f([a, b]) = [m, M]$ est bien un intervalle fermé et borné.

Chapitre 6

Fonctions dérivables sur un intervalle

Rappelons la définition 12 du chapitre I, en convenant que les intervalles de définition I sont désormais supposés non vides et non réduits à un point.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que la fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I .

6.1 Extrema locaux, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Ce paragraphe regroupe trois des théorèmes les plus importants du cours.

Définition (extremum d'une fonction) : soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} , et soit c un point de D . On dit que

* f admet un *maximum* en c si $f(x) \leq f(c)$ pour tout nombre x de D .

* f admet un *minimum* en c si $f(x) \geq f(c)$ pour tout nombre x de D .

* f admet un *extremum* en c si elle admet un maximum ou un minimum en c .

La valeur $f(c)$ prise par f en un tel point s'appelle alors *le maximum* ou *le minimum* de f sur D . Noter qu'en général, une fonction n'admet pas de maximum sur son domaine de définition. Par exemple, la fonction $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x$ n'admet pas de maximum sur $[0, 1[$.

Définition (extremum local) : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et soit c un point de I . On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*, *extremum*) **local** en c s'il existe un voisinage \mathcal{V}_c de c dans I tel que la restriction $f|_{\mathcal{V}_c} : \mathcal{V}_c \rightarrow \mathbb{R}$ de la fonction f à \mathcal{V}_c admette un maximum (resp. minimum, extremum) en c .

Lorsque $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert, on peut imposer que \mathcal{V}_c soit de la forme $]c - \delta, c + \delta[$ où δ est un nombre réel > 0 suffisamment petit. Lorsque $I = [a, b[$ et que $c = a$, on peut imposer que \mathcal{V}_c soit de la forme $[c, c + \delta[$. La valeur $f(c)$ prise par f en un tel point s'appelle alors *le maximum* ou *le minimum* de f *au voisinage* de c .

Théorème 6.1.1. (Condition nécessaire pour un extremum local) Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** $I =]a, b[$, et soit c un point de I . On suppose que f est dérivable en c . Alors, si f admet en c un extremum local, on a nécessairement : $f'(c) = 0$.

Avant de passer à la preuve, il est crucial de noter (toujours sous les hypothèses : I ouvert, f dérivable en $c \in I$) que cette condition nécessaire n'est **pas suffisante** : autrement dit, il se peut qu'une telle fonction vérifie $f'(c) = 0$, mais que f n'admette pas d'extremum local en c . Par

exemple, avec $I =]-1, 1[$ et $c = 0$, la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$. Pourtant, $f(x) > f(c)$ pour tout $x > c$, $f(x) < f(c)$ pour tout $x < c$, et comme tout voisinage \mathcal{V}_0 de 0 dans I contient des nombres $x > 0$ et des nombres $x < 0$, la fonction f n'admet pas d'extremum local en 0.

L'hypothèse préliminaire faite sur I dans le théorème est également nécessaire pour que son énoncé soit exact. Plus précisément, si I n'est pas ouvert, disons $I = [a, b[$, et si $c = a \in I$, f peut admettre un extremum local en c sans que $f'(c) = 0$ (il s'agit alors ici de la dérivée à droite de f en c , voir le §1.4.1). Ainsi, la fonction $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x$ admet un minimum local en $c = 0$, bien que $f'(0) = 1 \neq 0$.

On notera enfin que même si I est ouvert, f peut admettre un extremum local en $c \in I$ sans que f soit dérivable en c . Exemple : $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := |x|$, $c = 0$.

Preuve. La propriété d'avoir une dérivée nulle au point c est locale (elle ne dépend que des valeurs de f au voisinage du point c). Quitte à travailler avec la restriction de f à un sous-intervalle ouvert, nous pouvons donc supposer que $f(c)$ est un extremum de la fonction f sur tout l'intervalle I . Et quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer qu'il s'agit d'un maximum.

Pour tout $x \in I, x < c$, on a alors $f(x) \leq f(c)$, d'où $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$, et

$$f'(c) = f'_g(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Pour tout $x \in I, x > c$, on a aussi : $f(x) \leq f(c)$, d'où $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$, et

$$f'(c) = f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

On en déduit que $f'(c) = 0$.

Application pratique. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. D'après le théorème de Weierstrass, elle atteint son maximum M en (au moins) un point c de I . Si f est de plus dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, tous les points c où elle admet son maximum sont à rechercher

- soit parmi les points $c \in]a, b[$ tels que $f'(c) = 0$;
- soit aux extrémités $c = a$ et $c = b$.

Une comparaison des valeurs de f en ces différents points permet alors de trouver M . Idem pour le minimum m de f sur $[a, b]$.

Théorème 6.1.2. (théorème de Rolle) *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve. Comme la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, l'image $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$. On distingue deux cas :

- 1) si la fonction f est constante sur l'intervalle $[a, b]$, alors sa dérivée f' est identiquement nulle sur cet intervalle. N'importe quel point c de l'intervalle $]a, b[$ convient car il vérifie $f'(c) = 0$.
- 2) si la fonction f n'est pas constante, l'intervalle $[m, M]$ n'est pas réduit à un point. Donc l'une, au moins, des deux inégalités strictes : $M > f(a) = f(b)$ ou $m < f(a) = f(b)$ est vérifiée.

Dans ce 2e cas, supposons que l'on a $M > f(a)$ (le cas $m < f(a)$ se traite de manière). Par définition de l'image d'un intervalle, comme M est un point de $[m, M]$, il existe un point c de

l'intervalle $[a, b]$ telque $f(c) = M$ (autrement dit, comme on l'a déjà vu : f atteint son maximum sur $[a, b]$). Comme $M > f(a)$ et $M > f(b)$, c appartient en fait à l'intervalle $]a, b[$. Ainsi, la fonction f admet en c un maximum (donc a fortiori un maximum local). Étant dérivable sur $]a, b[$, elle l'est en c . La condition nécessaire d'extremum local entraîne alors que $f'(c) = 0$.

Traduction géométrique : soient \mathcal{C} le graphe de f , qui passe par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. L'hypothèse $f(a) = f(b)$ du théorème de Rolle revient à dire que les points A et B sont situés sur une droite horizontale (d'équation $Y = f(a)$). Comme f est dérivable sur $]a, b[$, on peut considérer, pour tout point $C = (c, f(c))$ du graphe distinct de A et B , la droite tangente $T_C(\mathcal{C})$ au graphe \mathcal{C} en C , dont la pente vaut $f'(c)$. La conclusion du théorème est donc qu'il existe un point C de \mathcal{C} situé entre A et B , où la tangente $T_C(\mathcal{C})$ est horizontale.

En particulier, *il existe $C \in \mathcal{C}$ entre A et B , tel que la tangente $T_C(\mathcal{C})$ à \mathcal{C} en C soit parallèle à la droite (AB)* . Le théorème des accroissements finis énonce que cette conclusion vaut encore si la droite (AB) n'est pas horizontale (sa pente est alors donnée par $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$).

Théorème 6.1.3. (théorème des accroissements finis). *Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors il existe un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Preuve. Considérons la fonction $\varphi(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Elle est, comme la fonction f , continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Par ailleurs elle vérifie : $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Elle satisfait donc aux hypothèses du théorème de Rolle, qui entraîne : il existe c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et c vérifie bien la relation souhaitée.

La conséquence la plus couramment utilisée du théorème des accroissements finis est de relier le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction, justifiant ainsi les *tableaux de variations* introduits en Terminale. Supposons par exemple que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable sur $]a, b[$, et que sa dérivée y reste toujours ≥ 0 . Alors, pour tout $x, y \in [a, b]$, avec $x < y$, il existe $z \in]x, y[\subset]a, b[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(z)$; comme $f'(z) \geq 0$, on a $f(y) \geq f(x)$ et la fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Si, de plus, f' reste > 0 sur $]a, b[$, alors, $f(y) > f(x)$ et f est strictement croissante sur $[a, b]$. Si f' est ≤ 0 (resp. < 0) sur $]a, b[$, f sera décroissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.

Une autre application du théorème des accroissements finis concerne les *calculs d'erreurs*. Nous en donnerons un exemple dans le cadre plus général suivant, qui redonne le théorème des accroissements fini pour $n + 1 = 1$.

6.2 Formule de Taylor-Lagrange, calculs d'erreurs

Théorème 6.2.1. (formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n + 1$) *Soient n un entier ≥ 0 , et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. On suppose que :*

* *la fonction f est n -fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$*

* la dérivée n -ième $f^{(n)}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Preuve. Soit A le nombre réel défini par :

$$\frac{A}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

Il s'agit de trouver un point c de $]a, b[$ tel que $A = f^{(n+1)}(c)$. On introduit pour cela la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2}(b-x)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

Il est évident que $\varphi(b) = 0$ et le choix du nombre A fait que $\varphi(a) = 0$. Par ailleurs la fonction φ est, comme la fonction f et chacune de ses n premières dérivées, continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Ainsi, la fonction φ satisfait donc les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, un calcul facile montre que :

$$\varphi'(x) = \frac{A - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Comme $c \neq b$, on en déduit bien que $A = f^{(n+1)}(c)$.

Application aux calculs d'erreurs : contrairement à la formule de Taylor-Young, qui ne décrit que le comportement de f au voisinage du point a , la formule de Taylor-Lagrange fournit un lien entre les valeurs de f en a et en b . Certes, on ne connaît pas le nombre c explicitement,

mais l'encadrement $a < c < b$ permet de contrôler le terme "reste" $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$, c'est-à-

dire l'erreur qu'on commet en remplaçant $f(b)$ par $f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$.

Supposons par exemple qu'on veuille calculer $\sqrt{50}$ à 0,01 près. On écrit $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = 7\sqrt{1+\frac{1}{49}}$. Considérons alors la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Le théorème des accroissements finis (Taylor-Lagrange à l'ordre 1), appliqué à f entre les points $a = 0$ et $b = \frac{1}{49}$, assure l'existence de $c \in]0, \frac{1}{49}[$ tel que

$$\sqrt{1+\frac{1}{49}} = 1 + \frac{1}{49} \frac{1}{2\sqrt{1+c}}, \text{ avec } 1 < \sqrt{1+c} < \frac{\sqrt{50}}{7} < \frac{8}{7}.$$

Donc $\frac{1}{14} - \frac{1}{14} \times \frac{1}{8} < \sqrt{50} - 7 < \frac{1}{14}$, et $7 + \frac{1}{14}$ est une approximation par excès de $\sqrt{50}$ avec une erreur d'au plus $\frac{1}{14 \times 8} < 0,01$. En particulier, $|\sqrt{50} - 7,07| < 0,01$.

Bien entendu, Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne une approximation plus précise. Comme $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, il existe $c \in]0, \frac{1}{49}[$ tel que

$$\sqrt{1+\frac{1}{49}} = 1 + \frac{1}{49} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{49^2} \times \frac{1}{8(1+c)^{\frac{3}{2}}}, \text{ avec } 1 < (1+c)^{\frac{3}{2}} < \frac{4}{3}.$$

Donc $-\frac{1}{8.7^3} + \frac{1}{8.7^3} \times \frac{1}{4} > \sqrt{50} - (7 + \frac{1}{14}) > -\frac{1}{8.7^3}$, et $7 + \frac{1}{14} - \frac{1}{2744}$ est une approximation par défaut de $\sqrt{50}$ avec une erreur d'au plus $\frac{1}{32.7^3} < 10^{-4}$. Ainsi, $|\sqrt{50} - 7,0710| < 0,0001$.

Chapitre 7

Fonctions réciproques

7.1 Injections, surjections, bijections

Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \rightarrow Y$ une application de X vers Y . Si $y \in Y$, tout élément x de X tel que $f(x) = y$ s'appelle un *antécédent* de y (relativement à f). Ainsi, un élément y de Y admet au moins un antécédent si et seulement s'il appartient à l'image $f(X) \subset Y$ de f . On dit que

* f est *injective* si $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, autrement dit, si chaque élément y de Y admet au plus un antécédent (et donc exactement un si $y \in f(X)$);

* f est *surjective* si tout élément y de Y admet au moins un antécédent, autrement dit si $f(X) = Y$;

* f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément y de Y admet un et un seul antécédent.

Une application injective $f : X \rightarrow Y$ définit donc automatiquement une application bijective $\bar{f} : X \rightarrow f(X) : x \mapsto \bar{f}(x) := f(x)$, qu'on s'autorise à noter encore f .

Soit f une application bijective de X vers Y . Pour chaque élément y de Y , il existe, par définition, un et un seul élément x de X tel que $f(x) = y$. On le note $f^{-1}(y)$. L'application $f^{-1} : Y \rightarrow X : y \mapsto f^{-1}(y)$ de Y vers X ainsi définie est appelée application réciproque de la bijection f . Elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall x \in X, f^{-1}(f(x)) = x \text{ autrement dit : } f^{-1} \circ f = id_X;$$

$$\forall y \in Y, f(f^{-1}(y)) = id_Y(y) = y \text{ autrement dit : } f \circ f^{-1} = id_Y.$$

Ces propriétés entraînent que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est elle aussi bijective, et que son application réciproque $(f^{-1})^{-1} : X \rightarrow Y$ coïncide avec f .

On va étudier ces notions dans le cas des fonctions numériques définies sur un intervalle I , et continues sur I . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, leur image $f(I)$ est alors un intervalle J , et l'application $f : I \rightarrow J$ admet une application réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ (autrement dit : est bijective) si et seulement si elle est injective. D'où la

Définition 7.1.1. Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I , d'image l'intervalle J . On appelle fonction réciproque de f l'unique fonction $f^{-1} : J \rightarrow I$ telle que

$$\forall x \in I, \forall y \in J : f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Remarques.

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone (Chapite I, Définition 3). Alors, f est automatiquement injective.
2. Dans ce cas, on peut considérer la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$. Celle-ci est également *strictement monotome, et de même sens de monotonie que f* . En effet, supposons par exemple f strictement croissante, et soient $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ deux points de $f(I)$. Si $y_1 < y_2$, les points $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$ vérifient forcément $x_1 < x_2$, sans quoi on aurait $y_1 > y_2$ d'après la croissance de f .

7.2 Fonctions réciproques et continuité

On vient de noter que si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone, alors elle est automatiquement injective. La proposition suivante énonce que cette condition suffisante d'injectivité est également nécessaire si f est continue.

Proposition 7.2.1. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Si f est injective, alors elle est strictement monotone.*

Preuve. Il suffit, f étant injective, de monter qu'elle est monotone. S'il n'en était pas ainsi, il existerait trois points $x < y < z$ de I tels que $f(x)$ et $f(z)$ soient tous les deux $> f(y)$ (ou tous deux $< f(y)$, auquel cas on remplacera f par $-f$ dans le raisonnement). Quitte à inverser les rôles de x et z dans ce qui suit, on peut supposer que $f(x) \leq f(z)$. Mais alors, $f(x) \in [f(y), f(z)]$ et le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la restriction de la fonction continue f à $[y, z]$, fournit un point t de l'intervalle $[y, z]$, donc distinct de x , tel que $f(t) = f(x)$. Cela contredit l'injectivité de f sur I .

Proposition 7.2.2. *Soient a, b deux éléments distincts de $\overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b . Alors, $\alpha := \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta := \lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existent, et l'intervalle $J = f(I)$ admet α et β pour extrémités. De plus, si I est fermé (resp. ouvert, resp. semi-ouvert), alors J est fermé (resp. ouvert, resp. semi-ouvert).*

Même si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé borné, cet énoncé n'est pas de même nature que le théorème de Weierstrass, puisqu'on précise ici où sont atteintes les bornes m, M de f . On notera par ailleurs que si I est ouvert en son extrémité a , c-à-d. si $a \notin I$, il se peut que a soit fini, mais que α soit infini, et inversement : penser à la fonction $f :] - \infty, 0[\rightarrow] - \infty, 0[: x \mapsto \frac{1}{x}$. Noter également que pour $a < b$, on a $\alpha < \beta$ si f est strictement croissante, sinon on a $\beta < \alpha$.

Principe de la preuve : on se ramène à étudier le comportement de f , strictement croissante, en l'extrémité inférieure a de I . Si $a \in I$, $\alpha = f(a)$ existe, appartient à $J = f(I)$ (par définition), et en est l'extrémité inférieure (croissance de f). Supposons maintenant $a \notin I$. Pour toute suite décroissante $(u_n, n \in \mathbb{N})$ de points de I tendant vers a , la suite $(f(u_n), n \in \mathbb{N})$ est décroissante, et admet donc une limite $\alpha_u \in \overline{\mathbb{R}}$. On vérifie alors que cette limite est indépendante du choix de la suite (u_n) , et peut donc se noter α . On montre enfin que pour toute suite $(x_n, n \in \mathbb{N})$ de points de I tendant vers a , la suite $f(x_n)$ tend vers α . Ainsi, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$ existe. Dans ces conditions, α est adhérent à J , en est l'extrémité inférieure (croissance de f), et $\alpha \notin J$, sans quoi il existerait un sous-intervalle $]a, x]$, avec $x > a$, de I où f ne serait pas croissante.

Proposition 7.2.3. *Soient $f : I \rightarrow J$ une fonction continue et bijective de I vers J , et $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque. Alors, f^{-1} est continue sur J .*

Preuve : soient u un point de J , et $a = f^{-1}(u)$ son antécédent relativement à f . Supposons que f^{-1} ne soit pas continue en u . Il existe alors un nombre $\delta > 0$ et une suite $(y_n), n \in \mathbb{N}$ de points

de J tendant vers u , d'antécédents $x_n := f^{-1}(y_n)$, tels que pour tout entier n , $|x_n - a| > \delta$. Sans perte de généralité, on peut, en extrayant une sous-suite, supposer la suite (y_n) strictement monotone. D'après la Remarque (2) ci-dessus, la suite (x_n) l'est alors aussi et admet donc une limite $a' \in \overline{\mathbb{R}}$, qui vérifie : $|a' - a| \geq \delta$, donc $a' \neq a$.

Montrons maintenant que a' appartient à I . En effet, a' est adhérent à l'intervalle I , donc si $a' \notin I$, c'en serait forcément une extrémité. On déduirait alors de la Proposition 9 d'une part que $\lim_{x \rightarrow a'} f(x)$ existe, et est donc égal à $\lim f(x_n) = \lim y_n = u$, d'autre part que cette limite n'appartiendrait non plus pas à J , ce que contredit l'hypothèse faite sur u . Ainsi, $a' \in I$.

Enfin, f est continue en $a' = \lim x_n$, donc la suite $y_n = f(x_n)$ tend vers $f(a')$. Or elle tend vers $u = f(a)$. Donc $f(a) = f(a')$, alors que a et a' sont deux points distincts de I . C'est la contradiction recherchée. ■

7.3 Théorème des fonctions réciproques

Théorème 7.3.1. (théorème des fonctions réciproques) *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I . Alors :*

1. *L'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I , et ont le même type d'ouverture..*
2. *La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J .*
3. *La fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J , de même sens de monotonie que f .*
4. *Si la fonction f est dérivable en un point a de I et si $f'(a)$ est non nul, alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Preuve. Les points 1, 2 et 3 ont été vus à la Remarque 2 et aux Propositions 9 et 10 qui précèdent. Il reste à prouver le point 4. On suppose donc que la fonction f est dérivable en un point $a \in I$, et que la dérivée $f'(a)$ est non nulle.

Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ revient à montrer que le rapport

$$\tau_{f^{-1}}(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

a une limite finie quand y tend vers b en restant dans $J \setminus \{b\}$.

Si $y \in J \setminus \{b\}$, le nombre $x = f^{-1}(y)$, qui appartient à $I \setminus \{a\}$, vérifie par définition la condition $y = f(x)$. On trouve donc :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\tau_f(x)}.$$

Or la fonction f^{-1} est continue au point b . Donc, quand y tend vers b , le nombre $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$, et $\tau_f(x)$ tend vers $f'(a)$. Comme $f'(a)$ est supposée non nulle, on trouve bien que $\lim_{y \rightarrow b} \tau_{f^{-1}}(y)$ existe (donc f^{-1} est dérivable en b), et que cette limite vaut $\frac{1}{f'(a)}$.

Remarque 3 : une fois la dérivabilité de la fonction f^{-1} établie, la formule donnant sa dérivée est immédiate. En effet, on a pour tout $x \in I$: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, et la fonction $x \mapsto x$ a pour dérivée 1 en tout point. Si f est dérivable en a et si f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, on déduit donc du théorème 9 sur la dérivée des fonctions composées que $(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(b)f'(a) = 1$. Ceci montre d'ailleurs que si $f'(a) = 0$, la fonction f^{-1} n'est pas dérivable en b .

7.4 Représentation graphique

Rappelons que le graphe $\mathcal{C} := \mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle I est l'ensemble des couples de \mathbb{R}^2 de la forme $(x, f(x))$, où x parcourt I .

Soit f un fonction continue strictement monotone sur l'intervalle I , et soit $J = f(I)$. Alors,

$$x \in I \text{ et } f(x) = y \quad \text{si et seulement si} \quad y \in J \text{ et } f^{-1}(y) = x.$$

Il en résulte que le graphe $\tilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C}_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque f^{-1} , c'est-à-dire l'ensemble des couples $(y, f^{-1}(y))$, où y parcourt l'intervalle J , coïncide avec l'ensemble des couples $(f(x), x)$, où x parcourt l'intervalle I .

Or, dans un repère orthonormé, le point de coordonnées (b, a) est le symétrique par rapport à la première bissectrice des axes de ce repère, du point de coordonnées (a, b) . Par conséquent, dans un tel repère, *les graphes \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Cette observation fournit une troisième preuve de la formule donnant la dérivée de f^{-1} au point $b := f(a)$. Considérons en effet les points $A = (a, b)$ du graphe de f et $\tilde{A} = (b, a)$ du graphe de f^{-1} , et supposons que f soit dérivable en a , de dérivée $f'(a) \neq 0$. Alors, f^{-1} est dérivable en b , et on peut parler de la droite tangente $T_A(\mathcal{C})$ (resp. $T_{\tilde{A}}(\tilde{\mathcal{C}})$) au graphe de f en A (resp. de f^{-1} en \tilde{A}). Désignons par θ (resp. $\tilde{\theta}$) l'angle que fait avec l'axe Ox la tangente $T_A(\mathcal{C})$ (resp. $T_{\tilde{A}}(\tilde{\mathcal{C}})$). Comme \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, ainsi que A et \tilde{A} , il en va de même des droites $T_A(\mathcal{C})$ et $T_{\tilde{A}}(\tilde{\mathcal{C}})$. Les angles qu'elles forment avec l'axe Ox vérifient donc

$$\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

La pente $f'(a)$ de la droite $T_A(\mathcal{C})$ est égale à $\tan(\theta)$; de même, $(f^{-1})'(b) = \tan(\tilde{\theta})$. Or pour $\theta \neq 0$ modulo π , on a : $\tan(\tilde{\theta}) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)}$. Donc $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

7.5 Les fonctions logarithme et exponentielle

La fonction exponentielle $\exp :]-\infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est dérivable, de dérivée > 0 , donc strictement croissante. Elle admet donc une fonction réciproque $\exp^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$, qui n'est bien sûr autre que la fonction \ln . Si a est un point de \mathbb{R} , d'image $\exp(a) = b \in]0, +\infty[$, on a $\exp'(a) = \exp(a) = b$, et on retrouve la formule $(\ln)'(b) = \frac{1}{b}$.

On pourrait tout aussi bien démarrer avec la fonction \ln , et définir \exp comme la fonction réciproque de \ln .

7.6 La fonction Arctangente

Soit f la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'après le théorème des fonctions réciproques, on peut affirmer que

$$f\left(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) =] \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \tan(x), \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x)[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

et que f établit une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

La fonction réciproque de f est appelée Arctangente et notée $x \mapsto \arctan(x)$. C'est une bijection de \mathbb{R} sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout réel x , $\arctan(x)$ est donc l'unique élément de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui a pour tangente le réel x . En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x.$$

Mais attention : si x est un nombre réel du domaine de définition $D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}[$ de la fonction tangente, il n'est en général **pas vrai** que $\arctan(\tan(x))$ soit égal à x . Par exemple, $\tan(\frac{5\pi}{4}) = 1$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan(\tan(\frac{5\pi}{4})) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$: il y a une infinité de réels dont la tangente est égale à 1, et parmi ces réels, seul $\frac{\pi}{4}$ appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Propriétés de la fonction Arctangente.

1. D'après le théorème des fonctions réciproques, la fonction Arctangente est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. La fonction Arctangente est impaire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine - et symétrique par rapport à la première bissectrice du graphe de la restriction f de \tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$. La dérivée de f ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; la fonction Arctangente est donc dérivable sur \mathbb{R} et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

7.7 La fonction Arcsinus

Soit g la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. D'après le théorème des fonctions réciproques on peut affirmer que

$$g\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$$

et que g établit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

La fonction réciproque de g est appelée Arcsinus et notée $x \mapsto \arcsin(x)$. C'est une bijection de $[-1, 1]$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est donc l'unique élément de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ qui a pour sinus le réel x , et

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Ainsi, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Attention : $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{6})) = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$.

Propriétés de la fonction Arcsinus.

1. La fonction Arcsinus est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

2. La fonction Arcsinus est impaire. Traduction géométrique comme plus haut. Noter que d'un point de vue géométrique, le graphe de \arcsin "admet une tangente" aux points $(-1, -\frac{\pi}{2})$ et $(1, \frac{\pi}{2})$, mais ces droites tangentes sont verticales (ou si l'on veut : de pente infinie).

3. La fonction g est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $g'(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. La dérivée de g ne s'annule pas sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; la fonction Arcsinus est donc dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

7.8 La fonction Arccosinus

Soit h la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction h est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. D'après le théorème des fonctions réciproques on peut affirmer que

$$h([0, \pi]) = [-1, 1]$$

et que h établit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

La fonction réciproque de h est appelée Arccosinus et notée $x \mapsto \arccos(x)$. C'est une bijection de $[-1, 1]$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est donc l'unique élément de l'intervalle $[0, \pi]$ qui a pour cosinus le réel x :

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x.$$

Ainsi, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$.

Propriétés de la fonction Arccosinus.

1. La fonction Arccosinus est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

2. La fonction h est dérivable sur $[0, \pi]$ et $h'(x) = -\sin(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)}$. La dérivée de g ne s'annule pas sur $]0, \pi[$; la fonction Arccosinus est donc dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Chapitre 8

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation dont l'inconnue est une fonction $y(x)$ d'une variable réelle x , et où interviennent y et sa dérivée y' , ainsi qu'éventuellement la variable x elle-même : par exemple,

$$y' = 2y \quad , \quad yy' + x = 1 \quad , \quad y' + y^2 = 0$$

sont des équations différentielles. Nous écrivons une telle équation sous la forme $f(x, y, y') = 0$ où f est une fonction de 3 variables.

On dit qu'une fonction φ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est une solution sur I d'une équation différentielle $f(x, y, y') = 0$ du premier ordre si φ est dérivable sur l'intervalle I , et si pour tout nombre x de l'intervalle I , on a : $f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$.

Insistons sur le fait qu'une solution de l'équation différentielle est la donnée du couple formé de la fonction φ et de son intervalle de définition I .

8.1 Équations différentielles du premier ordre sans second membre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre (on dit aussi : homogène) est une équation de la forme

$$y' = a(x)y \quad , \quad (\mathcal{E}_a)$$

où a est une fonction de x que l'on suppose continue sur un intervalle ouvert donné I de \mathbb{R} .

La fonction nulle $\varphi_0 = 0$ est clairement une solution de \mathcal{E}_a sur I . Si φ_1, φ_2 sont deux solutions sur I , la fonction $\varphi_1 + \varphi_2$ en est également une, car $(\varphi_1 + \varphi_2)'(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = a(x)\varphi_1(x) + a(x)\varphi_2(x) = a(x)(\varphi_1 + \varphi_2)(x)$ pour tout $x \in I$. De même, si α est une constante réelle, la fonction $\alpha\varphi_1$ est solution, puisque $(\alpha\varphi_1)'(x) = \alpha\varphi_1'(x) = a(x)(\alpha\varphi_1)(x)$. En d'autres termes, l'ensemble des solutions de \mathcal{E}_a sur I forme un *espace vectoriel*.

Nous allons maintenant *construire* une solution φ de \mathcal{E}_a non identiquement nulle sur I . Pour cela, nous notons que si J est un sous-intervalle de I où une telle solution φ ne s'annule en aucun point (il en existe par continuité de φ), alors

$$\forall x \in J \quad , \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a(x).$$

La fonction continue φ ne s'annulant pas sur J , elle y garde un signe constant. Si $\varphi > 0$, la fonction $\ln \circ \phi$ est définie et dérivable sur J , et vérifie $(\ln(\varphi(x)))' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a(x)$. Dans ces conditions, soit

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt \quad (x \in I)$$

une primitive de la fonction continue $a(x)$, de sorte que la dérivée de la fonction $\ln \circ \phi - A$ est identiquement nulle sur J . Comme J est un *intervalle*, il existe donc une constante C telle que

$$\forall x \in J, \quad \ln(\phi(x)) = A(x) + C.$$

En posant $K = e^C \in \mathbb{R}, K > 0$, on en déduit que

$$\varphi(x) = Ke^{A(x)}.$$

Si $\varphi < 0$ sur J , c'est la fonction $\ln \circ (-\varphi)$ qui vérifie les propriétés précédentes, et le même raisonnement entraîne que $\varphi(x) = Ke^{A(x)}$, où $K \in \mathbb{R}, K < 0$. Dans tous les cas, la fonction $\varphi = Ke^{A(x)}$ ainsi construite est définie sur tout I , y est dérivable, et vérifie bien

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = KA'(x)e^{A(x)} = a(x)\varphi(x).$$

C'est donc une solution non nulle de \mathcal{E}_a sur I .

Ainsi, l'ensemble des solutions de \mathcal{E}_a sur I est un espace vectoriel de dimension ≥ 1 . De plus, la preuve précédente montre que tous ses éléments sont linéairement dépendants de la solution $e^{A(x)}$. C'est donc un espace vectoriel de dimension 1.

8.2 Équations différentielles du premier ordre avec second membre

Il s'agit des équations de la forme

$$y' = a(x)y + b(x) \quad , \quad (\mathcal{E}_{a,b})$$

où a et b sont des fonctions de x , supposées continues sur un intervalle donné I de \mathbb{R} . On dit que la fonction $b(x)$ est le second membre de l'équation, tandis que l'équation différentielle $y' = a(x)y$ correspondante est appelée équation sans second membre ou équation homogène associée.

Proposition 8.2.1. *Soit y_1 et y_2 deux solutions (définies sur le même intervalle J) de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$. Alors la différence $y_2 - y_1$ est une solution (définie sur J) de l'équation homogène associée $y' = a(x)y$.*

Preuve : avec les notations de l'énoncé : $(y_2 - y_1)' = a(x)y_2 + b(x) - (a(x)y_1 + b(x)) = a(x)(y_2 - y_1)$.

Par conséquent, si on connaît une solution y_0 de $\mathcal{E}_{a,b}$ définie sur un intervalle J , n'importe quelle solution y de $\mathcal{E}_{a,b}$ sur J sera de la forme $y_0 + \varphi$ où φ est une solution de (\mathcal{E}_a) . Autrement dit,

$$y(x) = y_0(x) + Ke^{A(x)},$$

où K est une constante réelle arbitraire, et $A(x)$ une primitive de $a(x)$. On énonce ce principe en disant que *la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre.*

Reste donc à trouver une solution particulière y_0 de $(\mathcal{E}_{A,b})$. Il y pour cela deux méthodes.

1 . Quelques cas particuliers (pour $a(x)$ constant)

Quand $a(x) = r$ est une constante (de sorte que la solution générale de (\mathcal{E}_a) est Ke^{rx}), et que b est assez simple, on peut parfois trouver une solution y_0 proche de la forme de b . Par exemple,

- si $b(x)$ est un polynôme $P_n(x)$ de degré n , on cherchera y_0 sous la forme d'un polynôme $Q_n(x)$ de même degré n ;

- si $b(x) = \lambda e^{sx}$, avec $s \neq r$, on cherchera y_0 sous la forme μe^{sx} ; de même, si $b(x) = P_n(x)e^{sx}$, on tentera $y_0 = Q_n(x)e^{sx}$.

- si $b(x) = \lambda e^{rx}$, on cherchera y_0 sous la forme $\mu x e^{rx}$; de même, si $b(x) = P_n(x)e^{rx}$, on tentera $y_0 = Q_{n+1}(x)e^{rx}$.

- si $b(x)$ est une combinaison linéaire de $\cos(sx)$ et de $\sin(sx)$, on cherchera y_0 sous la même forme.

- enfin, on notera que si y_1 (resp. y_2) est une solution particulière de (\mathcal{E}_{a,b_1}) (resp. (\mathcal{E}_{a,b_2})), alors, $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_{a,b_1+b_2})$.

2 . La méthode de variation de la constante (pour $a(x)$ quelconque)

Cette méthode consiste à rechercher une solution particulière de $\mathcal{E}_{a,b}$ sous la forme

$$y_0(x) = K(x)e^{A(x)},$$

c'est-à-dire à remplacer la constante K apparaissant dans la solution générale de l'équation sans second membre (\mathcal{E}_a) par une fonction $K(x)$, supposée dérivable sur I . De $y'_0(x) = a(x)y_0(x) + b(x)$, on tire :

$$(a(x)K(x) + K'(x))e^{A(x)} = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x)$$

d'où une équation différentielle sur K ne faisant apparaître que K' :

$$K'(x) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Toute primitive $K_0(x) = \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt$ fournit donc une solution particulière $y_0(x) = K_0(x)e^{A(x)}$ de $\mathcal{E}_{a,b}$.

Exemple : trouver les solutions de $y' = \frac{1}{x}y + 1$ sur $I =]0, +\infty[$

Ici, $A(x) = \ln(x)$, donc l'équation homogène associée $y' = \frac{1}{x}y$ a pour solution générale $\varphi(x) = Ke^{\ln(x)} = Kx$ sur I . Une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, recherchée sous la forme $y_0(x) = K(x)x$, vérifie $y'_0 = K'(x)x + K(x) = K(x) + 1$, d'où

$$K'(x) = \frac{1}{x}, \quad K(x) = \ln(x) + C.$$

La solution générale de l'équation sur $]0, +\infty[$ est donc

$$y(x) = x \ln(x) + Cx, \quad x > 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 9

Nombres complexes et polynômes

Mots-clef du chapitre Nombre complexe, forme cartésienne, opération, conjugaison, inverse, démonstration par récurrence, argument, exponentielle complexe, formules d'addition, forme polaire, formules d'Euler, polynôme, racine, multiplicité, racine n -ième, théorème fondamental de l'algèbre, discriminant, translation, rotation, homothétie, similitude

9.1 Nombres complexes

Alors que les Babyloniens avaient compris quinze siècles avant notre ère comment résoudre des équations du second degré telles que $x^2 - 4x + 3 = 0$, longtemps il n'y eut pas d'avancée significative sur les équations du troisième degré. Le déblocage vint de la découverte, au XVII^e siècle italien, d'une mystérieuse quantité $\sqrt{-1}$ avec laquelle on pouvait calculer comme avec les nombres réels sans pour autant qu'elle en soit un (voir § 9.4).

C'est l'un des objectifs de ce chapitre que de définir le nombre $\sqrt{-1}$, noté i depuis L. EULER (mathématicien suisse, 1707-1783), ainsi, plus généralement, que les *nombres complexes* (ou *imaginaires*), de la forme $a + ib$. De même qu'on ne peut pas poser -2 carottes sur une table, on ne peut pas construire de segment de longueur $1 + i$. Mais contrairement à ce que la terminologie semble indiquer, les nombres complexes ne sont pas plus complexes, ni plus imaginaires, ni moins réels (au sens commun), que les nombres réels ou entiers.

Définitions Un *nombre complexe* est un couple $z = (x, y)$ de nombres réels ou, ce qui est équivalent, un point du plan cartésien Oxy (d'après le nom de R. DESCARTES, mathématicien, physicien et philosophe français, 1596–1650). On appelle *plan complexe* et on note \mathbb{C} l'ensemble de ces nombres. Deux complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ sont égaux et l'on note $z = z'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Définissons les opérations d'*addition* et de *multiplication par un réel* :

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'), \quad (x, y)a := a(x, y) := (xa, ya).$$

Le quadrilatère de sommets $O = (0, 0)$, (x, y) , $(x + x', y + y')$ et (x', y') est un *parallélogramme*. Nous noterons

$$\mathbf{1} := (1, 0) \quad \text{et} \quad i := (0, 1)$$

(la notation « $:=$ » indique qu'on définit le membre de gauche, et qu'il ne faut donc pas chercher à déduire ces égalités en fonction de ce qui précède), et omettrons en réalité de noter $\mathbf{1}$ explicitement :

$$(x, y) = \mathbf{1}x + iy = x + iy ;$$

l'écriture de $x + iy$ est la *forme cartésienne* de ce nombre. Voilà donc i défini ! Les nombres réels x et y sont respectivement les *parties réelle et imaginaire* de z et nous les noterons $x =: \Re(z)$ et $y =: \Im(z)$. Ce sont les coordonnées du point du plan identifié à z .

Le complexe *conjugué* de z est $\bar{z} := x - iy$; c'est le point symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

On peut de plus définir une opération de *multiplication* entre complexes, telle (cf. §9.4) que

$$i^2 = -1,$$

puisqu'en utilisant cette égalité ainsi que les mêmes règles de calcul que dans \mathbb{R} , on trouve :

$$\begin{aligned} zz' &= (x + iy)(x' + iy') \\ &= x(x' + iy') + iy(x' + iy') \quad (\text{distributivité}) \\ &= xx' + xiy' + iyx' + iyy' \quad (\text{distributivité}) \\ &= xx' - yy' + i(xy' + x'y) \quad (\text{commutativité de l'addition puis distributivité}) \end{aligned}$$

(il n'est pas essentiel de mémoriser ce résultat, mais il faut savoir refaire le calcul rapidement).

On constate alors que le produit

$$z\bar{z} = \bar{z}z = x^2 + y^2$$

est un nombre réel positif, en l'occurrence le carré de la distance du point z à l'origine du plan, et on appelle *module* de z le réel ≥ 0

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Proposition Tout complexe $z \neq 0$ admet un inverse, c'est-à-dire un complexe z^{-1} tel que $z^{-1}z = 1$, et cet inverse est unique.

Démonstration. D'après le calcul précédent, le nombre

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

est un inverse de z .

De plus, si w est un inverse quelconque de z : $wz = 1$, il s'avère en multipliant les deux membres par z^{-1} que $w = z^{-1}$, ce qui démontre l'unicité de l'inverse. \square

Exercice 9.1.1. *Quelle sont les parties réelle et imaginaire, le module, le conjugué et l'inverse de $z = (1 + i) + i(1 - i)$, de $z' = (1 + i)(2 - i)$ et de $z'' = \frac{1 + i}{1 - i}$?*

Solution : On a $z = 1 + i + i(1 - i) = 2 + 2i$, donc $\Re z = \Im(z) = 2$. Attention à ne pas commettre l'erreur de penser que $\Re z = 1 + i$ et $\Im z = 1 - i$; $\Re z$ et $\Im z$, par définition, sont réels. Il vient alors $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\bar{z} = 2 - 2i$ et $z^{-1} = \frac{1}{4}(1 - i)$.

De plus,

$$\begin{aligned} z' &= (1 + i)(2 - i) \\ &= 1(2 - i) + i(2 - i) \\ &= (2 - i) + (2i - i^2), \quad i^2 = -1 \\ &= 3 + i, \end{aligned}$$

donc $\Re z' = 3$, $\Im z' = 1$, $|z'| = \sqrt{10}$, $\bar{z}' = 3 - i$ et $z^{-1} = \frac{1}{10}(3 - i)$.

Enfin,

$$z'' = \frac{(1 + i)^2}{2} = i$$

donc $\Re z'' = 0$, $\Im z'' = 1$, $\bar{z}'' = -i$ et $z''^{-1} = -i$.

Exercice 9.1.2. Montrer que la distance entre deux points $a, z \in \mathbb{C}$ vaut $|z - a|$. Quelle est l'équation dans \mathbb{C} du cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \geq 0$?

Solution : Soient $z = x + iy$ et $a = u + iv$ les formes cartésiennes de z et a . On a

$$|z - a|^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

ce qui, d'après le théorème de Pythagore est bien le carré de la distance entre a et z . L'équation du cercle est donc $|z - a| = r$.

9.2 Trigonométrie

Nous allons écrire les nombres complexes sous une forme correspondant aux coordonnées polaires dans le plan.

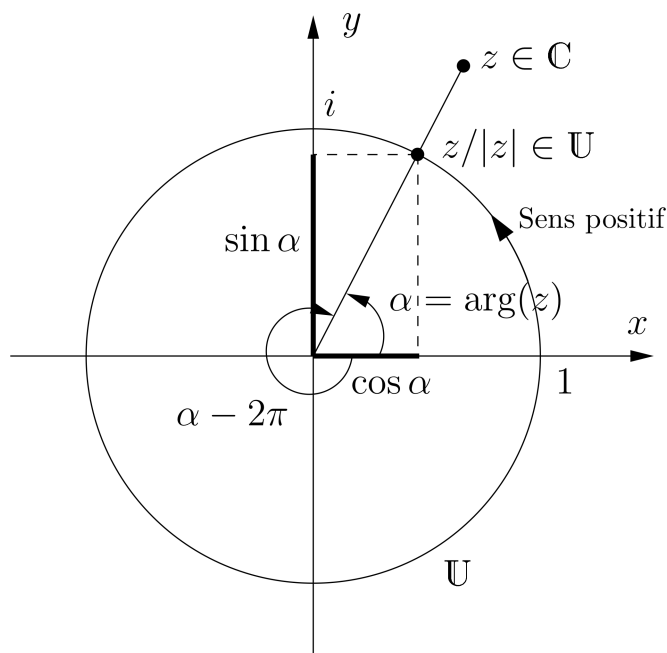
Notons

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

le *cercle trigonométrique* (en grec, *trigonon* = triangle, *metria* = science de la mesure).

Définitions L'*argument* d'un complexe z non nul, est l'angle orienté $\widehat{Ox, Oz}$; on le note $\arg(z)$. Rappelons qu'il s'agit de la longueur orientée d'un arc quelconque de \mathbb{U} joignant 1 à $z/|z|$. Rappelons que le cercle \mathbb{U} a pour longueur 2π (c'est une définition de $\pi \simeq 3,14$ comme déjà le savant grec ARCHIMÈDE DE SYRACUSE le savait trois siècles avant notre ère). Donc $\arg(z)$ n'est bien défini qu'à un multiple entier de 2π près — on dit *modulo* 2π . Par exemple, les arguments suivants sont tous égaux modulo 2π parce qu'ils correspondent au même point, -1, sur \mathbb{U} :

$$\dots = -3\pi = -\pi = \pi = 3\pi = \dots \pmod{2\pi},$$



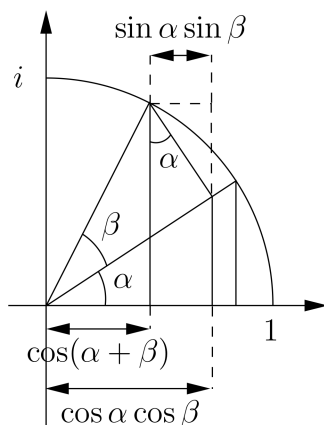
Rappel : formules d'addition de cos et sin Si $\alpha \in \mathbb{R}$, le *cosinus* et le *sinus* de α sont les coordonnées du point de \mathbb{U} d'argument α (voir la figure ci-dessus) ; elle sont notées $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ et, en particulier, elles sont 2π -périodiques :

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha.$$

De plus, les formules d'addition suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

se lisent sur le dessin suivant et son analogue pour le sinus :



On pourra comparer cette démonstration avec la devise mise en exergue par J. L. LAGRANGE (mathématicien et astronome français, 1736–1813) dans sa *Mécanique analytique* : « On ne trouvera pas de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométrique ou mécanique, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme. »

Exercice 9.2.1. Retrouver les sinus et cosinus de π/n , avec $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Solution : Par symétrie le point de \mathbb{U} d'argument π (= la moitié de la longueur de \mathbb{U}) est -1 , donc $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$. De même, le point de \mathbb{U} d'argument $\pi/2$ (= le quart de la longueur de \mathbb{U}) est i , donc $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Quant au point de \mathbb{U} d'argument $\pi/4$, par symétrie il est sur la première diagonale, donc $x := \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ et, d'après le théorème de Pythagore, $2x^2 = 1$ donc $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le triangle dont les sommets sont $0, 1$ et le point de \mathbb{U} dont l'argument est $\pi/3$ est isocèle. Comme la somme des angles d'un triangle vaut π , il est même équilatéral. Donc $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et, d'après le théorème de Pythagore, $\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$. Pour $\pi/6$, par symétrie (par rapport à la première diagonale) le sinus et le cosinus sont inversés : $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}/2$.

Définition Rappelons que e est l'unique nombre réel dont le logarithme vaut 1 : $\ln e = 1$, $e \simeq 2.71828$. On suppose connue l'exponentielle d'un nombre réel.

Définissons l'exponentielle d'un nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) par

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y) ;$$

si $z = x$, cette définition coïncide bien avec l'exponentielle réelle (et il n'y a donc pas conflit de définitions).

En particulier,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

et

$$e^0 = 1, \quad e^{i2\pi} = 1, \quad e^{i\pi} + 1 = 0, \quad e^{i\pi/2} = i.$$

Propriété fondamentale $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 e^z e^{z'} &= e^x e^{x'} (\cos y + i \sin y) (\cos y' + i \sin y') \\
 &\quad \text{(définition de l'exponentielle complexe)} \\
 &= e^x e^{x'} [(\cos y \cos y' - \sin y \sin y') + i(\sin y \cos y' + \cos y \sin y')] \\
 &\quad \text{(distributivité)} \\
 &= e^{x+x'} [\cos(y+y') + i \sin(y+y')] \\
 &\quad \text{(formules d'addition de l'exponentielle réelle, cos et sin)} \\
 &= e^{(x+x') + i(y+y')} = e^{z+z'}.
 \end{aligned}$$

□

Corollaire immédiat Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'inverse de e^z est e^{-z} .

De plus, comme avec les réels on peut définir la puissance entière d'un complexe quelconque de la façon suivante : on pose $w^0 = 1$ (conventionnellement ; avec l'exception que certains mathématiciens préfèrent ne pas définir 0^0), $w^1 = w$, et supposant w^n connu pour un certain entier $n \geq 1$, on définit $w^{n+1} = w w^n$. Ceci permet de calculer w^n pour un entier naturel n arbitraire, en n étapes. On pose de plus $w^{-n} = (w^{-1})^n$, où w^{-1} est l'inverse précédemment introduit de w . La propriété fondamentale implique que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(e^z)^n = e^{nz}.$$

Démonstration de cette formule par récurrence. Elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons l'avoir démontrée à un rang $n \geq 1$ et déduisons-en la formule au rang suivant. Avec la propriété fondamentale on voit alors que

$$(e^z)^{n+1} = (e^z)^n e^z = e^{nz} e^z = e^{(n+1)z},$$

ce qui est la formule au rang suivant. Donc la formule est vraie pour tout $n \geq 0$.

Remarque : Ceci est un archétype de démonstration par récurrence. La dernière affirmation de la démonstration vient du fait que si au contraire la propriété n'était pas vraie pour tout entier $n \geq 2$, en considérant le plus petit entier n pour laquelle elle est violée, l'induction ci-dessus appliquée au rang $n - 1$ aboutirait à une absurdité.

Il reste à démontrer la formule pour $n < 0$. Mais ceci est immédiat, puisqu'alors en posant $m = -n \geq 0$ on obtient

$$(e^z)^n = (e^{-z})^m = e^{-mz} = e^{nz}.$$

□

Exercice 9.2.2. Que penser de cette suite d'égalités :

$$e^{i\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^{\frac{2\pi}{2\pi}} = \left(e^{i2\pi}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} = 1^{\frac{\alpha}{2\pi}} = 1 ?$$

Solution : La deuxième égalité est fautive (et c'est la seule !). La propriété $(x^a)^b = x^{ab}$, vraie pour des réels > 0 , se démontre avec la fonction logarithme. Mais la fonction logarithme ne jouit pas dans le complexe de propriétés aussi simples que dans le réel (c'est une fonction multivaluée, comme \arg) et la propriété correspondante est fautive, comme les égalités précédentes le montrent par l'absurde.

Lemme Soient ρ et θ deux réels tels que $\rho > 0$, et $z = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$|z| = \rho \quad \text{et} \quad \arg z = \theta \pmod{2\pi}.$$

Démonstration. On a

$$|z|^2 = z\bar{z} = \rho^2 e^{i(\theta-\theta)} = \rho^2$$

donc, comme $|z|$ et ρ sont tous deux ≥ 0 , $|z| = \rho$. Ensuite, par définition l'argument de z est l'argument de $z/|z| = e^{i\theta}$, soit $\theta \pmod{2\pi}$. \square

N.B. : Si on avait $\rho < 0$, alors on aurait

$$z = (-\rho)e^{i(\pi+\theta)}$$

donc, d'après le lemme, $|z| = -\rho$ et $\arg(z) = \pi + \theta \pmod{2\pi}$.

Un corollaire important du lemme est que pour tout complexe $z \neq 0$ on a

$$z = |z| e^{i \arg(z)} ;$$

c'est la *forme polaire* de z .

Corollaire Le produit de deux complexes non nuls z et z' a pour module $|z||z'|$ et pour argument $\arg z + \arg z'$.

Démonstration. C'est évident sous forme polaire : avec des notations évidentes,

$$zz' = |z|e^{i\theta} |z'|e^{i\theta'} = |z||z'| e^{i(\theta+\theta')}.$$

\square

Exercice 9.2.3. Démontrer la formule de Moivre (A. DE MOIVRE, *mathématicien français*, 1667-1754), où $\theta \in \mathbb{R}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Solution : Si l'on pose $z = e^{i\theta}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Formules d'Euler $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration. On a

$$\begin{cases} e^{i\theta} & = \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} & = \cos \theta - i \sin \theta. \end{cases}$$

Ces deux équations peuvent être vues comme un système de deux équations linéaires à deux inconnues, $\cos \theta$ et $\sin \theta$. En faisant la somme des deux équations on élimine $\sin \theta$ et on obtient l'expression voulue de $\cos \theta$; en faisant la différence des deux équations on élimine $\cos \theta$ et on obtient l'expression voulue de $\sin \theta$. \square

Ces formules permettent de retrouver facilement de nombreuses identités trigonométriques.

Exercice 9.2.4. Trouver les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos^3 \theta = a \cos 3\theta + b \cos \theta + c$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$; le membre de droite, combinaison linéaire de 1, $\cos \theta$ et $\cos 3\theta$ (i.e. ces quantités interviennent à la puissance un), s'appelle la linéarisation de $\cos^3 \theta$.

Solution : Posons $z = e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (z^3 + 3z + 3z^{-1} + z^{-3}) \\ &= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta \quad (\text{à justifier}). \end{aligned}$$

Pour élever $e^{i\theta} \pm e^{-i\theta}$ à une puissance élevée, on aura intérêt, plutôt qu'à développer la puissance pas à pas, à utiliser la très utile formule du binôme de Newton.

Exercice 9.2.5. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i\omega t}$, où ω est un paramètre réel. En déduire une solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

Solution : On a

$$f'(t) = (\cos \omega t + i \sin \omega t)' = \omega (-\sin \omega t + i \cos \omega t) = i\omega f(t).$$

En dérivant une fois de plus, on voit que f est solution de l'équation différentielle donnée.

9.3 Factorisation des polynômes

Définitions Un *polynôme* est une expression de la forme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, où les coefficients a_j sont des nombres complexes. Si $a_n \neq 0$, l'entier n s'appelle le *degré* de P . Une *racine* de P est un complexe a tel que $P(a) = 0$.

Exercice 9.3.1. Montrer qu'il existe un polynôme T_3 de degré trois tel que $\cos(3\theta) = T_3(\cos \theta)$. (Plus généralement, on appelle n -ième polynôme de Tchebychev le polynôme T_n tel que $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$.)

Solution : On a calculé dans un exercice précédent que

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta.$$

Donc

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

et le polynôme

$$P(z) = 4z^3 - 3$$

convient (on peut d'ailleurs montrer que c'est le seul).

S'il existe un polynôme $Q(z)$ et un complexe a tels que $P(z) = (z - a)Q(z)$, alors a est évidemment racine de P . La réciproque est vraie :

Lemme admis Si a est une racine du polynôme $P(z)$, il existe un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Ce lemme sera démontré dans un cours d'Algèbre ultérieur avec l'algorithme de division euclidienne des polynômes.

La *multiplicité* de la racine a est le plus grand entier m tel qu'il existe un polynôme $R(z)$ tel que $P(z) = (z - a)^m R(z)$.

Exercice 9.3.2. Notons $j = e^{i2\pi/3}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$; pour cela on pourra calculer $(1 - j)(1 + j + j^2)$.

Solution : On a $(1 - j)(1 + j + j^2) = 1 - j^3 = 0$. Comme $j \neq 1$, forcément $1 + j + j^2 = 0$.

Définition S'il est difficile de déterminer les racines d'un polynôme en général, certains polynômes particulièrement simples sont bien compris et jouent un rôle important. C'est le cas notamment des polynômes de la forme $z^n - 1$.

Une *racine n -ième de l'unité* est un complexe z tel que $z^n = 1$.

Injectons la forme polaire de z : $z = r e^{i\theta}$ dans l'équation :

$$r^n e^{in\theta} = 1.$$

En égalant module et argument, on voit que $r^n = 1$ (équation analogue à l'équation de départ, mais maintenant dans \mathbb{R}^+ !) et que $n\theta = 0 \pmod{2\pi}$. L'équation portant sur r admet une unique solution réelle positive, $r = 1$. Celle portant sur θ équivaut à ce qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n\theta = k2\pi,$$

soit

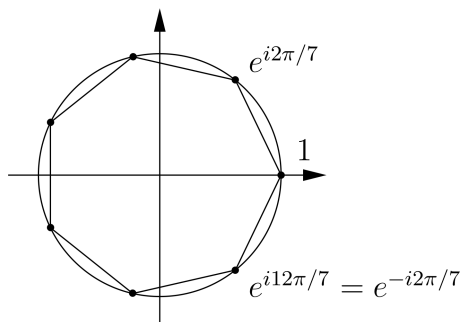
$$\theta = k \frac{2\pi}{n}.$$

On obtient ainsi une infinité de solutions $(1, k2\pi/n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais beaucoup de ces solutions correspondent en réalité au même complexe z , puisque $re^{i\theta}$ est 2π -périodique par rapport à θ . Précisément, deux solutions sont égales modulo 2π : $k2\pi/n = l2\pi/n + m2\pi$ (pour un certain $m \in \mathbb{Z}$) si et seulement si $k - l = mn$ (pour un certain m), i.e. $k - l$ est multiple de n . Donc on obtient toutes les solutions une fois et une seule en laissant k prendre les valeurs $0, \dots, n - 1$ (au-delà, k est forcément égal à une valeur déjà prise modulo n).

Conclusion Les racines n -ièmes de l'unité sont les n nombres de la forme

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Géométriquement, ce sont les points du cercle trigonométrique obtenus à partir de 1 par rotations successives de $2\pi/n$, c'est-à-dire les sommets du polygone régulier à n côtés, comme le représente la figure suivante dans le cas particulier $n = 7$



En particulier, pour tout entier n le polynôme $z^n - 1$ admet n racines complexes, alors qu'il en admet au plus deux de réelles (parmi 1 et -1 , puisqu'elles sont de module unité).

Un théorème remarquable affirme qu'il en est de même de *tous* les polynômes de même degré.

Théorème fondamental de l'algèbre (admis) Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ de degré $n > 0$ admet n racines complexes (comptées avec leur multiplicité). Autrement dit, P s'écrit

$$P(z) = a_n (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_p)^{m_p},$$

où les nombres m_j sont des entiers naturels tels que $m_1 + \dots + m_p = n$.

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème mais il est frappant que toutes utilisent au moins un outil analytique et donc qu'aucune n'est purement algébrique.

Exercice 9.3.3. Trouver les racines n -ièmes de -2 .

Solution : On cherche les racines n -ièmes de -2 sous leur forme polaire $re^{i\theta} : r^n e^{in\theta} = 2e^{i\pi}$, i.e. $r = 2^{1/n}$ et $\theta = \pi/n + k2\pi/n$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En prenant $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on obtient déjà toutes les solutions :

$$z = 2^{1/n} e^{i\pi(1+2k)/n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Les tels z s'obtiennent à partir des racines n -ièmes de l'unité par rotation de π puis par homothétie d'un facteur $2^{1/n}$.

Exercice 9.3.4. Montrer que le polynôme de degré 2

$$P(z) = az^2 + bz + c$$

a pour racines

$$z_{\pm} = \frac{1}{2a} (-b \pm \delta),$$

où δ est l'une quelconque des deux racines opposées du discriminant $\Delta := b^2 - 4ac$.

Solution : La méthode pour trouver les racines complexes est la même que pour les racines réelles. On commence par mettre le polynôme sous forme canonique :

$$\begin{aligned} P(z) &= a \left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \Delta \right], \quad \Delta = (\pm\delta)^2. \end{aligned}$$

À ce stade, la discussion est simplifiée par rapport au cas où l'on cherche les solutions réelles d'une équation à coefficients réels, puisque Δ possède toujours deux racines carrées complexes $(\pm\delta)$. L'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ permet alors de factoriser $P(z)$:

$$P(z) = a(z - z_-)(z - z_+),$$

ce qui montre que l'ensemble des racines de P est $\{z_-, z_+\}$.

Exercice 9.3.5. Calculer

$$S(\theta) := \sum_{0 \leq k \leq n} \cos k\theta := 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta.$$

Comment faut-il choisir θ pour que $S(\theta)$ soit nul ? Expliquer géométriquement pourquoi.

Solution : En remarquant que

$$\sum \cos k\theta = \Re \sum e^{ik\theta} = \Re \sum (e^{i\theta})^k,$$

on est ramené à utiliser l'identité

$$\sum_{0 \leq k \leq n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

vérifiée pour tout complexe $r \neq 1$ (il suffit de multiplier à gauche et à droite par $1 - r$ pour le voir).

On peut en effet écarter le cas exceptionnel où $e^{i\theta} = 1$, i.e. $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, qui est explicite : $S(0) = n$. (i.e. est l'abréviation de la locution latine *id est*, qui signifie c'est-à-dire tout en étant plus rapide à écrire. On l'utilise entre deux propriétés pour signifier qu'elles sont équivalentes l'une à l'autre.)

Si donc $e^{i\theta} \neq 1$,

$$S(\theta) = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Cette somme est nulle si et seulement si $e^{i(n+1)\theta} = 1$, i.e. $(n+1)\theta = 2\pi \pmod{2\pi}$.

Exercice 9.3.6. Soit P un polynôme réel. Montrer que si λ est une racine de P , il en est de même de $\bar{\lambda}$. En déduire que si P est de degré trois, il possède nécessairement une racine réelle.

Solution : Si

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_0 = 0,$$

alors

$$P(\bar{\lambda}) = \overline{a_n \lambda^n + \dots + a_0} = a_n \bar{\lambda}^n + \dots + a_0 = 0.$$

Si P est de degré 3, il possède trois racines :

$$P(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3), \quad \lambda_p \in \mathbb{C}.$$

D'après ce qui précède, il existe deux indices distincts m et n tels que $\lambda_m = \bar{\lambda}_n$, et le troisième est tel que $\lambda_p = \bar{\lambda}_p$, i.e. $\lambda_p \in \mathbb{R}$.

9.4 Complément

Un calcul audacieux Soit à résoudre

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{9.1}$$

Cherchons une solution sous la forme $x = u + v$:

$$(u + v)^3 - 15(u + v) - 4 = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$u^3 + v^3 - 4 + 3(u + v)(uv - 5) = 0.$$

Cette équation est satisfaite en particulier si

$$u^3 + v^3 = 4 \quad \text{et} \quad u^3 v^3 = 5^3 = 125,$$

c'est-à-dire si u^3 et v^3 sont solutions de l'équation auxiliaire

$$(w - u^3)(w - v^3) = w^2 - (u^3 + v^3)w + u^3 v^3 = w^2 - 4w + 125 = 0,$$

soit, si on essaye de ne faire apparaître w qu'une seule fois,

$$(w - 2)^2 + 11^2 = 0.$$

Pour ensuite utiliser l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, il serait commode de disposer d'un nombre dont le carré vaut -1 puisqu'alors, en notant $\sqrt{-1}$ ce nombre, l'équation auxiliaire deviendrait

$$(w - 2)^2 - (11\sqrt{-1})^2 = (w - 2 + 11\sqrt{-1})(w - 2 - 11\sqrt{-1}) = 0,$$

et ses solutions seraient

$$u^3 = 2 - 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad v^3 = 2 + 11\sqrt{-1}.$$

Mais alors $u = 2 - \sqrt{-1}$ et $v = 2 + \sqrt{-1}$ conviendraient puisque

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1},$$

et une solution de l'équation initiale serait donc

$$x = u + v = 4.$$

Il est maintenant aisé de vérifier que le nombre $x = 4$ est bel et bien une solution de l'équation voulue! Il a cependant fallu une audace intellectuelle immense aux algébristes italiens pour imaginer un tel calcul reposant de façon cruciale sur la manipulation d'un nombre imaginaire $\sqrt{-1}$, sorti d'on ne sait où.

Chapitre 10

L'espace réel à trois dimensions

Mots-clef du chapitre Vecteur de \mathbb{R}^3 , base canonique, combinaison linéaire, vecteurs libres ou liés, quantificateur, implication logique, droites et plans vectoriels et affines, produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, orthogonalité, volume orienté, déterminant, multi-linéarité, algorithmes fang-cheng, formule de développement, produit vectoriel, raisonnement par analyse-synthèse

10.1 Vecteurs de \mathbb{R}^3

Définitions Un *vecteur (réel) à 3 composantes* est un triplet $v = (x, y, z)$ de nombres réels, ou, ce qui est équivalent, un point de l'espace cartésien $\mathbb{R}^3 = Oxzy$. Les réels x, y, z sont les *composantes* de v .

Deux vecteurs $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ sont égaux si et seulement si toutes leurs composantes sont égales : $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Définissons les opérations d'addition et de multiplication par un réel comme on l'avait fait pour $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$(x, y, z) + (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z'), \quad a(x, y, z) := (ax, ay, az).$$

Deux petites différences avec le plan complexe : l'habitude est de noter le réel à *gauche* du vecteur ; et l'on ne donnera pas de nom particulier à \mathbb{R}^3 comme on l'avait fait en notant $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Ceci est lié à une différence majeure : il n'est pas possible de définir sur \mathbb{R}^3 une multiplication analogue de la multiplication des complexes, pour une raison algébrique profonde exprimée par le théorème de Gelfand-Mazur.

Notations

$$0 := 0_{\mathbb{R}^3} := (0, 0, 0), \quad -v := (-1)v, \quad v - w := v + (-w).$$

Les trois *vecteurs de la base canonique* (cette terminologie sera expliquée ultérieurement) :

$$i := (1, 0, 0), \quad j := (0, 1, 0), \quad k := (0, 0, 1).$$

Attention : la lettre i désigne ici tout autre chose que le nombre complexe i (il faut se faire à ce que les notations changent avec le contexte ; dans \mathbb{R}^4 , on note $1, i, j, k$ les vecteurs de la base canonique!).

Exemple $(x, y, z) = xi + yj + zk$.

10.2 Vecteurs libres ou liés

Définitions Une *combinaison linéaire* de deux vecteurs (ou plus) v et w est une expression de la forme

$$av + bw,$$

où a et b sont deux réels, appelés les *coefficients* de la combinaison linéaire.

Une *relation linéaire* entre v et w est une combinaison linéaire qui est nulle. Par exemple, il existe toujours la *relation linéaire triviale* entre v et w :

$$0v + 0w = 0_{\mathbb{R}^3},$$

mais cette relation, étant universellement satisfaite (quelle que soient v et w), ne dit justement rien sur v et w .

Un exemple de relation linéaire non triviale est :

$$2(1, 2, 3) - (2, 4, 6) = 0.$$

Deux vecteurs v et w sont *liés* (sous-entendu : par une relation linéaire non triviale) s'il existe deux scalaires a et b non tous deux nuls tels que $av + bw = 0$.

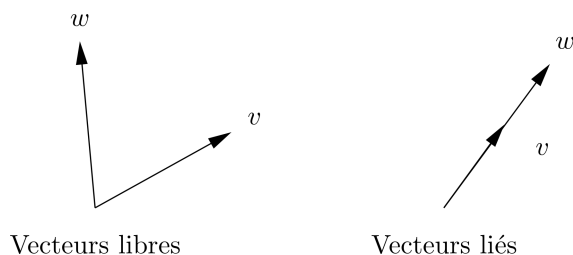
Par exemple, $0_{\mathbb{R}^3}$ est lié à n'importe quel vecteur v de \mathbb{R}^3 , puisque $1 \cdot 0_{\mathbb{R}^3} + 0 \cdot v = 0$ est une relation linéaire non triviale.

Remarque Supposons v et w liés : $av + bw = 0$ avec a et b non tous deux nuls.

- Si $a \neq 0$, $v = -\frac{b}{a}w$.
- Sinon, $a = 0$ donc $b \neq 0$, et $w = -\frac{a}{b}v$.

On voit que v et w sont liés si et seulement si ils sont proportionnels l'un à l'autre. Donc *liés* est synonyme de *proportionnels* ou de *colinéaires*. Mais *lié* est une propriété symétrique par rapport aux deux vecteurs (peu importe si l'un est nul) et se généralisera plus facilement à plus de deux vecteurs.

Définition Les vecteurs v et w sont *libres* si ils ne sont pas liés.



Ici il est commode d'introduire certains symboles de la Logique mathématique :

- le signe d'implication \Rightarrow , utilisé entre deux propriétés logiques pour signifier que la première implique la seconde
- le signe d'équivalence \Leftrightarrow , utilisé entre deux propriétés logiques pour signifier qu'elles sont équivalentes l'une à l'autre (i.e. chacune des deux implique la seconde)
- le *quantificateur universel* $\forall =$ « quel(s) que soi(en)t »
- le *quantificateur existentiel* $\exists =$ « il existe ».

Il faut cependant limiter l'usage de ces symboles à des situations précises (voir ci-dessous) et s'interdire leur insertion dans des phrases en français pour éviter des contre-sens logiques.

Formalisons les propriétés d'être libre ou lié :

v et w sont liés $\Leftrightarrow \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, av + bw = 0$.

ou, de façon équivalente,

v et w sont libres $\Leftrightarrow \text{non} (\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, av + bw = 0)$.

Comment simplifier cette expression logique ? Il suffit de réfléchir au sens des mots ! Se convaincre que nier une proposition logique revient à permuter les quantificateurs (\forall et \exists) et nier la conclusion.

Donc : v et w sont libres $\Leftrightarrow \forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad av + bw \neq 0$,

i.e. $\boxed{v \text{ et } w \text{ sont libres} \Leftrightarrow \forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (av + bw = 0 \Rightarrow a = b = 0)}$.

Dans la pratique, c'est cette dernière proposition logique qu'on utilise le plus souvent pour voir si deux vecteurs sont libres ou liés. Comprendre que la proposition logique à droite du signe d'équivalence n'est pas une simple équation ; elle est elle-même une implication !

Exemple Les vecteurs $v = (1, 2, 3)$ et $w = (3, 2, 1)$ sont-ils libres ou liés ? Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $av + bw = 0$. Nous allons simplifier cette équation de façon à voir explicitement quelles valeurs de a et b sont possibles :

- soit la seule possibilité est $a = b = 0$, et alors la caractérisation encadrée de deux vecteurs libres est vérifiée : v et w sont libres ;
- soit il existe des solutions (a, b) différentes de $(0, 0)$, correspondant à autant de relations linéaires non triviales entre v et w , et alors v et w sont liés.

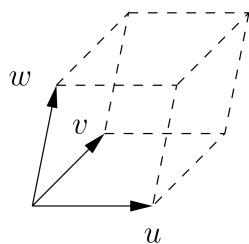
L'équation vectorielle $av + bw = 0$ équivaut au système de trois équations linéaires scalaires suivant :

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ 3a + b = 0. \end{cases}$$

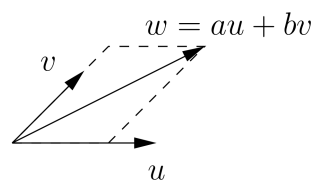
Si l'on note ℓ_1 , ℓ_2 et ℓ_3 les lignes de ce système, la combinaison $2\ell_1 - 3\ell_2$ permet d'éliminer b et montre que $-4a = 0$, soit $a = 0$. Ensuite, n'importe laquelle des trois équations de départ implique que $b = 0$. La proposition logique encadrée étant vérifiée, v et w sont libres.

Remarque De même, trois vecteurs u, v, w sont *liés* s'il existe entre eux une relation linéaire non triviale : $au + bv + cw = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$; ils sont *libres* sinon, c'est-à-dire si l'implication suivante est vraie :

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \quad au + bv + cw = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$



Trois vecteurs libres



Trois vecteurs liés

10.3 Droites et plans

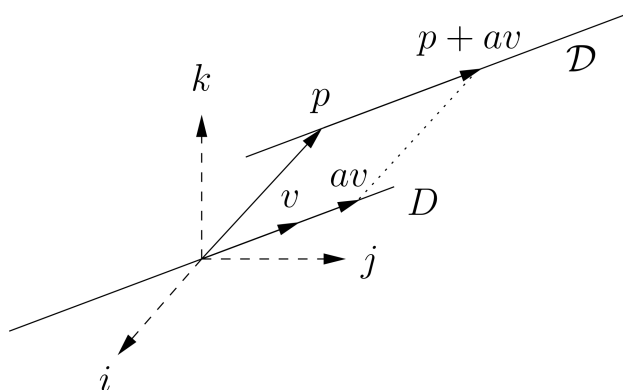
Définitions La droite vectorielle D engendrée par un vecteur non nul v est

$$D = \mathbb{R}v = \{av, a \in \mathbb{R}\};$$

c'est l'ensemble des vecteurs w liés à v ($w - av = 0$).

La droite affine \mathcal{D} passant par un point $p \in \mathbb{R}^3$ et dirigée par v (ou par D) est

$$\mathcal{D} = p + D = \{p + av, a \in \mathbb{R}\}.$$



Exemple La droite affine passant par $p = (1, 1, 1)$ et dirigée par $v = (1, 2, 3)$ est l'ensemble des $q = (x, y, z)$ tels qu'il existe un réel a tel que

$$q = p + av, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = 1 + a \\ y = 1 + 2a \\ z = 1 + 3a. \end{cases}$$

Ce système, qui donne les composantes de w comme fonction d'un paramètre réel a , est un *paramétrage* de \mathcal{D} .

La première équation du paramétrage peut être « résolue en a », i.e. peut servir à exprimer a en fonction du reste : $a = x - 1$, et l'on peut injecter cette égalité dans les deux autres équations :

$$\begin{cases} a = x - 1 \\ y = 2x - 1 \\ z = 3x - 2. \end{cases}$$

Le fait qu'il existe a tel que ces trois équations soient satisfaites équivaut à ce que les deux dernières équations soient satisfaites :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3x - 2 \end{cases}$$

(x, y, z et a étant donnés, le premier système implique certainement le second, obtenu en négligeant la première équation ; réciproquement, le second système, implique le premier à condition de poser justement $a = x - 1$). Le système obtenu de deux équations scalaires entre les 3 composantes de q s'appelle une *équation (cartésienne)* de \mathcal{D} . On est passé d'un paramétrage à une équation en *éliminant* le paramètre a .

Inversement, on peut passer d'une équation à un paramétrage en introduisant un paramètre, opération pour laquelle il y a beaucoup de choix possibles (correspondant à tous les points $p \in \mathcal{D}$ et tous les vecteurs v dirigeant \mathcal{D}).

Exercice 10.3.1. Montrer qu'une droite affine qui passe par 0 est une droite vectorielle.

Solution : Si $0 \in \mathcal{D}$, il existe a_0 tel que $p + a_0v = 0$. Alors, pour tout a on a

$$p + av = (p + av) - (p + a_0v) = (a - a_0)v,$$

i.e. \mathcal{D} est la droite vectorielle engendrée par v .

Définitions Le plan vectoriel P engendré par deux vecteurs libres v et w est

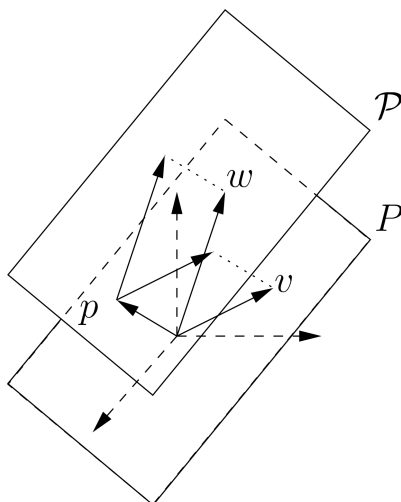
$$P = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w = \{av + bw, a, b \in \mathbb{R}\};$$

c'est l'ensemble des vecteurs obtenus par combinaisons linéaires de v et de w .

Le plan affine \mathcal{P} passant par un point $p \in \mathbb{R}^3$ et dirigé par v et w (ou par P) est

$$\mathcal{P} = p + P = \{p + av + bw, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

De même que pour les droites, un plan affine passant par l'origine est un plan vectoriel.



Exercice 10.3.2. Pourquoi suppose-t-on, dans cette définition, que v et w sont libres ?

Solution : Si v et w étaient liés, l'un d'eux serait proportionnel à l'autre, disons par exemple $w = cv$, et toute combinaison linéaire des deux serait en réalité proportionnelle à v : $av + bw = (a + bc)v$. Alors P serait une droite vectorielle.

Exemple Le plan affine passant par $p = (1, 1, 1)$ et dirigé par les vecteurs libres $v = (1, 2, 3)$ et $w = (3, 2, 1)$ est l'ensemble des $q = (x, y, z)$ tels qu'il existe a et b tels que

$$a = p + av + bw \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = 1 + a + 3b \\ y = 1 + 2a + 2b \\ z = 1 + 3a + b. \end{cases}$$

Ce système d'équations donnant q en fonction d'un paramètre est un *paramétrage* de \mathcal{P} . De même que pour les droites, en éliminant les paramètres on obtient une *équation* de \mathcal{P} . Pour un plan, comme il y a deux paramètres à éliminer, il ne restera plus qu'une seule équation scalaire. La combinaison linéaire $\ell_2 - 2\ell_3$ permet d'éliminer b :

$$y - 2z = -1 - 4a,$$

soit, en résolvant l'équation par rapport à a ,

$$a = \frac{1}{4}(-1 - y + 2z).$$

Grâce à la symétrie particulière de cet exemple (\mathcal{P} est invariant par la symétrie échangeant x et z) on voit que

$$b = \frac{1}{4}(-1 - y + 2x).$$

On peut maintenant injecter ces expressions de a et de b dans l'une quelconque des trois équations de départ (et vérifier qu'on obtient des équations équivalentes dans chacun des trois cas). Par exemple, la deuxième équation donne

$$x - 2y + z = 0.$$

Il s'avère que \mathcal{P} passe par $0_{\mathbb{R}^3}$ et qu'il est donc vectoriel.

10.4 Produit scalaire

Définition Le *produit scalaire* de deux vecteurs $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$ est le scalaire (réel)

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

La *norme (euclidienne)* de v est

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Un vecteur est *unitaire* si sa norme vaut 1. Deux vecteurs sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

Propriétés Produit scalaire :

- Symétrie : $v \cdot w = w \cdot v$
- Linéarité en le premier argument : $(av + a'v') \cdot w = a(v \cdot w) + a'(v' \cdot w)$
- Linéarité en le second argument : $v \cdot (bw + b'w') = b(v \cdot w) + b'(v \cdot w')$

Norme :

- Positivité : $\|v\| \geq 0$, et $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- Homogénéité : $\|av\| = |a| \|v\|$
- Inégalité triangulaire : $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Ces propriétés découlent directement des définitions, sauf la dernière qui est une conséquence du résultat suivant.

Inégalité de Cauchy-Schwarz $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$, avec égalité si et seulement si v et w sont liés (A. L. CAUCHY, mathématicien français, 1789–1857 ; H. A. SCHWARZ, mathématicien allemand, 1843–1921).

Démonstration. On peut supposer que par exemple $w \neq 0$, parce que sinon $v \neq 0$ et la démonstration dans ce cas est similaire. L'idée astucieuse est de remarquer que la fonction « norme au carré » est positive en particulier sur la droite affine $v + \mathbb{R}w$:

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \|v + aw\|^2 = \|v\|^2 + 2a(v \cdot w) + a^2 \|w\|^2 \geq 0 ;$$

le discriminant de ce polynôme en a est donc ≤ 0 , d'où l'inégalité.

Si l'égalité de Cauchy-Schwarz est atteinte, le discriminant est nul, et donc il existe a tel que $v + aw = 0$: v et w sont liés. Réciproquement, si v et w sont liés, quitte à échanger éventuellement v et w on peut supposer qu'il existe a tel que $v = aw$, ce qui implique bien $|v \cdot w| = |a|w \cdot w = \|v\| \|w\|$. \square

On peut maintenant démontrer l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + 2v \cdot w + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

Proposition $v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos(\widehat{v, w})$

Idee de la démonstration. D'abord, grâce à la bilinéarité du produit scalaire, il suffit de démontrer l'égalité quand $\|v\| = \|w\| = 1$.

Ensuite on montre que si R est une rotation de \mathbb{R}^3 (que l'on définira précisément plus tard dans le Cours) elle préserve le produit scalaire : $v \cdot w = (Rv) \cdot (Rw)$ et les angles : $\cos(\widehat{v, w}) = \cos(\widehat{Rv, Rw})$. Enfin on choisit une rotation qui envoie v sur le premier vecteur i de la base canonique, et qui envoie w dans le plan $Oxy \subset \mathbb{R}^3$. Alors Rv et Rw sont respectivement de la forme $(1, 0, 0)$ et $(w'_1, w'_2, 0)$ avec $w'^2_1 + w'^2_2 = 1$, de sorte que

$$v \cdot w = w'_1 = \cos(\widehat{v, w}).$$

\square

Proposition L'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur $v \neq 0$ est un plan vectoriel appelé le *plan orthogonal* à v .

Démonstration. Soit P l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $v \neq 0$. Notons $v = (v_1, v_2, v_3)$ et supposons par exemple que $v_3 \neq 0$, les autres cas étant similaires. L'ensemble P a pour équation

$$v_1x + v_2y + v_3z = 0,$$

i.e.

$$z = -\frac{1}{v_3}(v_1x + v_2y);$$

l'équation est satisfaite si et seulement si il existe deux scalaires a et b tels que

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -\frac{1}{v_3}(v_1a + v_2b). \end{cases}$$

Donc P est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 0, -v_1/v_3)$ et $(0, 1, -v_2/v_3)$. \square

Exercice 10.4.1. Trouver une équation du plan affine \mathcal{P} passant par $p = (1, 1, 1)$ et orthogonal à $v = (1, 2, 3)$ (i.e. dirigé par le plan vectoriel orthogonal à v).

Solution : $q = (x, y, z)$ appartient à \mathcal{P} si et seulement si $(q - p) \cdot v = 0$, i.e.

$$(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0,$$

soit

$$x + 2y + 3z = 6.$$

Exercice 10.4.2. *Montrer que trois vecteurs de \mathbb{R}^3 contenus dans le plan vectoriel $z = 0$ sont liés. (On verra plus tard qu'il en est de même de trois vecteurs contenus dans un plan vectoriel quelconque.)*

Solution : *Les trois vecteurs sont de la forme*

$$u = (u_1, u_2, 0), \quad v = (v_1, v_2, 0) \quad \text{et} \quad w = (w_1, w_2, 0).$$

On veut montrer qu'il existe une relation linéaire non triviale entre eux. On peut supposer que $u \neq 0$, parce que sinon c'est évident ($u + 0v + 0w = 0$), et même que $u_1 \neq 0$ (les autres cas étant similaires).

— *Analyse. Supposons qu'ils satisfont une relation linéaire*

$$au + bv + cw = 0, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 & (\ell_1) \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0, & (\ell_2) \end{cases}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Comme $u_1 \neq 0$, on peut éliminer a de la deuxième équation en remplaçant la ligne ℓ_2 par la combinaison $u_1\ell_2 - u_2\ell_1$:

$$(u_1v_2 - u_2v_1)b + (u_1w_2 - u_2w_1)c = 0.$$

Premier cas : $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$. Alors $v = \frac{v_1}{u_1}u$.

Second cas : $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$. Alors

$$b = -\frac{u_1w_2 - u_2w_1}{u_1v_2 - u_2v_1}c.$$

— *Synthèse. Dans chacun des deux cas distingués, on voit que u, v et w sont liés :*

Premier cas : $\frac{v_1}{u_1}u - v = 0$.

Second cas : on peut choisir c arbitrairement (non nul), par exemple $c = 1$. Alors il suffit de poser

$$b = -\frac{u_1w_2 - u_2w_1}{u_1v_2 - u_2v_1}$$

puis

$$a = -\frac{1}{u_1}(bv_1 + cw_1),$$

pour que $au + bv + cw = 0$.

10.5 Déterminant en petite dimension

Comment calculer la longueur d'un vecteur, l'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède? Ces quantités s'avèrent plus faciles à calculer quand on les munit d'un signe \pm (de façon cohérente, de façon notamment que le signe change quand on permute deux côtés); on les qualifie alors d'*orientées*, et alors ce sont toutes des incarnations, dans des dimensions particulières, de la fonction *déterminant*.

Par exemple, la longueur orientée du « vecteur » x de \mathbb{R} est x lui-même (une expression polynomiale), tandis que la longueur (positive) est $|x|$. Mais c'est en dimensions 2 et 3 que nous allons comprendre comment faire ces calculs en général.

Axiomes intuitifs de l'aire orientée $\det(v, w)$ **du parallélogramme** $P = \{av + bw, 0 \leq a, b \leq 1\}$ **engendré par deux vecteurs** $v = (v_1, v_2)$ **et** $w = (w_1, w_2)$

— *Homogénéité*

$$\det(\alpha v, w) = \alpha \det(v, w) = \det(v, \alpha w)$$

— *Additivité*

$$\det(v + v', w) = \det(v, w) + \det(v', w)$$

(pour s'en convaincre, décomposer v' en un vecteur parallèle à v et un vecteur parallèle à w , et faire un dessin plus précis que ci-dessous)

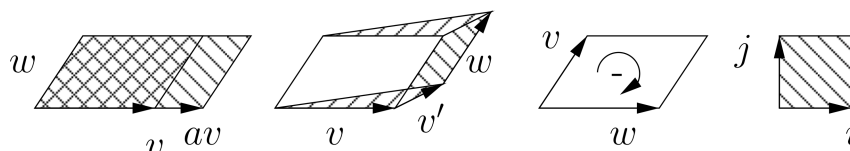
— *Antisymétrie*

$$\det(v, w) = -\det(w, v)$$

(l'aire orientée change de signe quand on tourne dans deux sens opposés)

— *Normalisation*

$$\det(i, j) = 1, \quad \text{où } i = (1, 0), \quad j = (0, 1).$$



L'homogénéité, l'additivité et l'antisymétrie montrent que $\det(v, w)$ est *bilinéaire*, i.e. *linéaire* en chacun de ses deux arguments :

- $\det(av + a'v', w) = a \det(v, w) + a' \det(v', w)$
- $\det(v, bw + b'w') = b \det(v, w) + b' \det(v, w')$.

Généralisation au volume orienté De même, le *volume orienté* serait une fonction $\det : (\mathbb{R}^3)^3 \rightarrow \mathbb{R}, (u, v, w) \mapsto \det(u, v, w)$,

- *tri-linéaire* : $\det(au + a'u', v, w) = a \det(u, v, w) + a' \det(u', v, w)$
 $\det(u, bv + b'v', w) = b \det(u, v, w) + b' \det(u, v', w)$
 $\det(u, v, cw + c'w') = c \det(u, v, w) + c' \det(u, v, w')$
- *antisymétrique* : $\det(u', v', w') = -\det(u, v, w)$ si le triplet de vecteurs (u', v', w') s'obtient à partir de (u, v, w) par permutation de deux des trois vecteurs
- *normalisée* : $\det(i, j, k) = 1$.

Remarques sur les parallélépipèdes aplatis

- Si $u = 0$, par linéarité par rapport à u on voit que $\det(u, v, w) = \det(2u, v, w) = 2 \det(u, v, w)$ donc $\det(u, v, w) = 0$, et de même pour v et w .
- Si deux des vecteurs parmi u, v et w sont égaux, on voit que $\det(u, v, w) = 0$; en effet, si par exemple $u = v$, par antisymétrie $\det(u, v, w) = \det(v, u, w) = -\det(u, v, w)$.
- Plus généralement, si u, v et w sont liés (par une relation linéaire non triviale : $au + bv + cw = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$), $\det(u, v, w) = 0$. En effet, supposons par exemple que $a \neq 0$ (les autres cas étant analogues). On peut résoudre la relation linéaire en u : $u = -\frac{b}{a}v - \frac{c}{a}w$, puis injecter cette égalité dans \det et utiliser la linéarité de \det par rapport à son premier argument :

$$\det(u, v, w) = -\frac{b}{a} \det(v, v, w) - \frac{c}{a} \det(w, v, w) ;$$

mais chacun des deux termes du membre de droite valent 0 d'après la remarque précédente.

Nous allons voir que ces règles de calcul suffisent pour calculer $\det(u, v, w)$, sans ambiguïté. Mais nous supposons dans ce Cours qu'une telle fonction \det existe. (Son existence n'est en effet pas évidente : en manipulant les vecteurs de différentes façons, pourquoi obtient-on le même résultat ?)

Nous admettrons aussi le caractère multiplicatif du déterminant :

$$\det(MN) = \det M \det N$$

Définitions Considérons le tableau

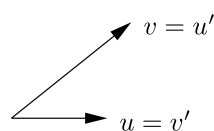
$$M = (u, v, w) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

des neuf composantes de u , v et w (on aurait aussi pu écrire les vecteurs en lignes les uns au-dessus des autres) ; un tel tableau s'appelle aussi une *matrice*.

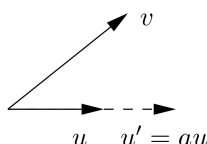
Une *opération élémentaire* sur les colonnes de M est l'une des opérations suivantes :

- *Transposition* : on permute deux colonnes, par exemple en remplaçant u par $u' = v$ et v par $v' = u$
- *Dilatation* : on multiplie une colonne par un réel $a \neq 0$, par exemple en remplaçant u par $u' = au$
- *Transvection* : on ajoute à une colonne donnée une autre colonne (distincte) multipliée par un réel a quelconque, par exemple en remplaçant u par $u' = u + av$

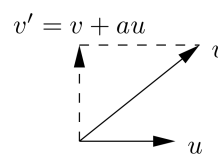
Les opérations analogues en dimension 2 se visualisent facilement.



Transposition



Dilatation



Transvection

Les opérations élémentaires sont inversibles : on peut revenir à la matrice initiale par une autre opération élémentaire, dans les exemples donnés en posant respectivement

- $u = v'$ et $v = u'$
- $u = u'/a$ (d'où l'importance ici d'avoir $a \neq 0$)
- $u = u' - av$.

Lemme Le volume orienté est modifié de la façon suivante par chacune des opérations élémentaires :

- $\det(v, u, w) = -\det(u, v, w)$ (antisymétrie)
- $\det(au, v, w) = a \det(u, v, w)$ (homogénéité)
- $\det(u + av, v, w) = \det(u, v, w)$ (tri-linéarité et antisymétrie).

Nous allons voir une méthode systématique pour, à partir d'un triplet de vecteurs (u, v, w) quelconque, nous ramener par une suite d'opérations élémentaires à un triplet de vecteurs dont on connaît trivialement le volume (soit que ce volume soit nul, soit qu'il vaille 1 d'après la condition de normalisation).

Algorithme fang-cheng L'algorithme *fang-cheng* (=algorithme sur les modèles rectangulaires, en chinois) est un procédé de calcul couramment appelé *algorithme de Gauss* en Occident, d'après le nom du « roi des mathématiciens » C. F. GAUSS (1777–1855), mais découvert dans la Chine du II^e siècle avant notre ère.

1. *Un premier cas d'arrêt de l'algorithme.* Si tous les coefficients de la première ligne de M sont nuls, les vecteurs u , v et w sont dans le plan Oyz , donc liés (exercice § 10.4.2), et $\det(u, v, w) = 0$.
2. *Choix du premier pivot.* Sinon, quitte à permuter deux colonnes on peut supposer que $u_1 \neq 0$, et même, quitte à dilater u par le facteur $1/u_1$, que $u_1 = 1$:

$$M = (u, v, w) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient de la première et de la première colonne ainsi obtenu, égal à 1, s'appelle le *pivot* (pour l'opération suivante).

3. *Élimination des coefficients à droite du pivot.* En remplaçant v et w par

$$v' = v - v_1u \quad \text{et} \quad w' = w - w_1u,$$

on est ramené à une matrice de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

4. *Deuxième cas d'arrêt de l'algorithme.* À ce stade, si $v_2 = w_2 = 0$ (en plus du fait que $v_1 = w_1 = 1 = 0$), v et w appartiennent à la droite $x = y = 0$ et sont liés, donc $\det(u, v, w) = 0$.
5. *Itération.* Sinon, de même que précédemment, par une permutation-dilatation on se ramène à

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ u_2 & \boxed{1} & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

et, par une transvection, à

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ u_2 & \boxed{1} & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

6. *Troisième cas d'arrêt de l'algorithme.* Si $w_3 = 0$, la dernière colonne est nulle donc $\det(u, v, w) = 0$.
7. *Élimination des coefficients à gauche des trois pivots.* Sinon, $w_3 \neq 0$, soit, après dilatation de w_3 , $w_3 = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ u_2 & \boxed{1} & 0 \\ u_3 & v_3 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, en remplaçant v par $v' = v - v_3w$, puis u par $u' = u - u_2v' - u_3w$, on aboutit à la matrice des trois vecteurs de la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

dont le déterminant vaut 1.

Remarques :

- Dans tous les cas, on aboutit à un déterminant connu (0 ou 1), par une suite d'opérations élémentaires dont on connaît l'effet sur le déterminant ; donc le déterminant initial s'en déduit.
- De cet algorithme il découle que le volume orienté est une fonction polynomiale des composantes des vecteurs.
- Cet algorithme et ses variantes sont utiles dans beaucoup d'autres problèmes que le calcul des déterminants, et le lecteur attentif aura remarqué qu'il se généralise directement à n vecteurs de \mathbb{R}^n .

Formule générale de l'aire orientée d'un parallélogramme Soit à calculer l'aire A du parallélogramme engendré par deux vecteurs

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire le déterminant $\det M$ de la matrice

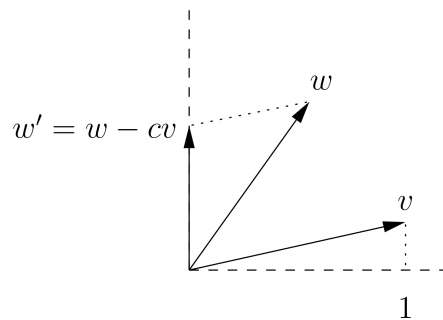
$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

L'algorithme de fang-cheng en deux dimensions est parfaitement similaire à sa version en trois dimensions.

Supposons pour commencer que $a \neq 0$, i.e. que v n'est pas vertical. Dilatons le premier vecteur d'un facteur $1/a$:

$$A = a \det \begin{pmatrix} \boxed{1} & c \\ b/a & d \end{pmatrix}.$$

Remplaçons w par $w - cv$:



en utilisant la linéarité par rapport à w et le fait que $\det(v, v) = 0$:

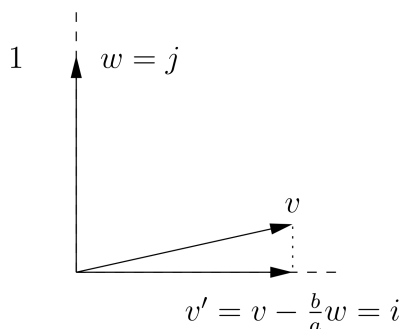
$$A = a \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & d - bc/a \end{pmatrix}.$$

Si $d - bc/a = 0$, la seconde colonne est nulle et $A = 0$.

Sinon,

$$A = a \left(d - \frac{bc}{a} \right) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{pmatrix},$$

soit, après la transvection qui substitue $v - \frac{b}{a}w$ à v :



on obtient

$$A = (ad - bc) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad - bc.$$

On voit que cette formule donne encore le bon résultat, $A = 0$, quand $d - b/a = 0$.

Par ailleurs, on avait exclu le cas où $a = 0$. Nous sommes en effet passé par des intermédiaires de calcul qui n'avaient pas de sens dans ce cas. Mais, dans le Cours d'Analyse, on montre que les fonctions polynomiales sont continues. Comme le déterminant est un polynôme en a, b, c et d , en particulier il dépend continûment de a . Donc l'expression $ad - bc$, qui est continue par rapport à a , reste valable quand $a = 0$.

Finalement, dans tous les cas on a

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Formule du développement par rapport à une colonne

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} w_1 - \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} w_2 + \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} w_3.$$

Le facteur qui apparaît devant w_r , $r = 1, 2, 3$, est le déterminant de la matrice obtenue à partir de la matrice de départ en supprimant la ligne et la colonne de w_r , affecté d'un signe qui change à chaque terme.

Par antisymétrie, on en déduit des formules analogues pour développer le déterminant par rapport aux deux autres colonnes.

Ces formules sont commodes à utiliser notamment quand la matrice possède un ou plusieurs coefficients nuls. Mais on tâchera de ne pas se tromper dans les signes; le savant allemand G. W. LEIBNIZ (1646–1716) lui-même se trompa, dans un mémoire de 1678, certes pour les 24 termes du déterminant d'une matrice 4×4 .

Démonstration. Notons Δ le déterminant à calculer. On a

$$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k.$$

Par linéarité de Δ par rapport à w ,

$$\Delta = w_1 \det(u, v, i) + w_2 \det(u, v, j) + w_3 \det(u, v, k),$$

où

$$\det(u, v, i) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix},$$

et de même avec les deux autres termes. □

Exercice 10.5.1. Calculer le volume V du tétraèdre de sommets

$$A = (1, 1, 1), B = (2, 3, 4), C = (3, 4, 2) \quad \text{et} \quad D = (4, 2, 3).$$

Ces quatre points sont-ils dans un même plan ?

Solution : Le volume orienté du parallélépipède engendré par les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} vaut

$$\pm 2V = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -18,$$

donc $V = 9$. Comme ce volume est non nul, les quatre points ne sont pas coplanaires (voir le §prop :lies pour ce dernier point).

10.6 Produit vectoriel

Définition Le produit vectoriel de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^3$ est l'unique vecteur, noté $u \wedge v$, tel que pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ on ait

$$\det(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w.$$

Démonstration de l'existence et de l'unicité de $u \wedge v$. *Unicité.* Appliquons successivement la formule voulue à $w = i, j$ et k , en notant $u \wedge v = (x_1, x_2, x_3)$. D'après la formule de développement du déterminant par rapport à la dernière colonne,

$$x_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = -\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_3 = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix},$$

soit

$$x_1 = u_2v_3 - u_3v_2, \quad x_2 = u_3v_1 - u_1v_3 \quad \text{et} \quad x_3 = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Donc $u \wedge v$ est unique.

Existence. Définissons $u \wedge v = (x_1, x_2, x_3)$ par les formules précédentes. D'après la formule du développement du déterminant par rapport à la troisième colonne, pour tout vecteur w on a bien $\det(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w$, ce qui montre l'existence d'un vecteur satisfaisant l'égalité voulue. \square

Remarque. Il peut sembler bizarre dans la démonstration d'existence et d'unicité d'un objet mathématique quelconque de commencer par montrer son unicité quand on ne connaît pas encore son existence. De ce point de vue, il serait plus naturel d'inverser l'ordre de présentation. Mais la démonstration de l'unicité permet d'analyser ce que doit être le vecteur $u \wedge v$ (par conditions nécessaires), et la démonstration de l'existence fait la synthèse de cette analyse. Du point de vue de la logique, tout y est, malgré l'ordre inhabituel, et cela raccourcit la rédaction. Ce type de preuve par *analyse-synthèse* est très courant.

Corollaire Le produit vectoriel est bi-linéaire :

$$\begin{cases} (au + a'u') \wedge v = a(u \wedge v) + a'(u' \wedge v) \\ u \wedge (bv + b'v') = bu \wedge v + b'u \wedge v'. \end{cases}$$

Ceci découle directement de la tri-linéarité du déterminant.

Lemme : formule du double produit vectoriel

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

Non démonstration. En écrivant $u = u_1i + u_2j + u_3k$, et de même pour v et w , on se ramène à vérifier la formule pour les vecteurs de la base canonique, soit $3^3 = 27$ vérifications, que nous laissons à la charge du lecteur scrupuleux. \square

Plus tard dans le Cours, quand nous aurons étudié les applications orthogonales, nous pourrons ramener la démonstration à deux vérifications seulement.

Proposition Le produit vectoriel $u \wedge v$ est nul si et seulement si u et v sont liés. Sinon, c'est un vecteur orthogonal à u et v , et

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin(\widehat{u, v}).$$

Démonstration. Si u et v sont liés, $\det(u, v, w) = 0$ pour tout w donc $u \wedge v = 0$. Réciproquement, si $u \wedge v = 0$, les formules en composantes ci-dessus montrent que u et v sont liés.

Supposons maintenant $u \wedge v \neq 0$. Par définition,

$$(u \wedge v) \cdot u = \det(u, v, u) = 0,$$

donc $u \wedge v$ est orthogonal à u et, pour la même raison, à v aussi.

Quant à la dernière formule :

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= \det(u, v, u \wedge v) \quad (\text{définition du produit vectoriel}) \\ &= \det(u \wedge v, u, v) \quad (\text{antisymétrie}) \\ &= ((u \wedge v) \wedge u) \cdot v \quad (\text{définition du produit vectoriel}) \\ &= (u^2v - (u \cdot v)u) \cdot v \quad (\text{formule du double produit}) \\ &= u^2v^2 - (u \cdot v)^2 \\ &= (1 - \cos^2(\widehat{u, v}))u^2v^2 \quad (\text{formule § 10.4}) \\ &= \sin^2(\widehat{u, v})u^2v^2. \end{aligned}$$

\square

Exemple Trouver l'équation de la droite D normale à $x + y + z = 0$ passant par $p = (1, 2, 3)$. Le plan $P : x + y + z = 0$ est le plan orthogonal de $v = (1, 1, 1)$. On cherche donc l'équation de la droite passant par p et dirigée par v . Une solution serait, comme on l'a déjà fait, d'écrire un paramétrage de la droite, puis d'éliminer le paramètre. Une solution plus directe, qui utilise le produit vectoriel, consiste à remarquer que D est l'ensemble des $q = (x, y, z)$ tels que $q - p$ est parallèle à v , i.e.

$$(q - p) \wedge v = 0, \quad q - p = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 3 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} (y - 2) - (z - 3) \\ (z - 3) - (x - 1) \\ (x - 1) - (y - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z + 1 \\ z - x - 2 \\ x - y + 1 \end{pmatrix} = 0.$$

La petite subtilité ici est que les trois équations scalaires obtenues ne sont pas indépendantes (parce que le produit vectoriel de $q - p$ et de v est a priori orthogonal à v) : la somme de ces trois équations est nulle, en effet.

Donc le système de ces équations est équivalent au système obtenu en ne gardant par exemple que les deux premières équations :

$$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ -x + z - 2 = 0. \end{cases}$$