Sorbonne Université — 1M001 — Analyse et algèbre pour les sciences
Examen du 12 juin 2019 — Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique (tel que calculatrices, téléphones portables, montres connectées, etc.) est interdite. Ceux-ci doivent être rangés dans les sacs et mis en position éteinte.

Toutes les réponses doivent être justifiées, soit en indiquant qu'il s'agit d'un résultat du cours, soit par un raisonnement ou un calcul. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet énoncé comporte 4 exercices indépendants.

L'examen est noté sur 50 points.

6 pts **Exercice 1.** Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On note u' et v' les dérivées de u et v. Donner les dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas de préciser sous quelles conditions les fonctions sont définies, ni de justifier les réponses) :

$$(v \circ u)' = \dots \qquad (e^u)' = \dots \qquad (\sin u)' = \dots$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \dots \qquad (\arctan u)' = \dots \qquad \big(\ln(1-u)\big)' = \dots$$

Solution :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u) \qquad (e^u)' = u'\, e^u \qquad (\sin u)' = u' \cos u$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2} \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \big(\ln(1-u)\big)' = \frac{-u'}{1-u}$$

20 pts **Exercice 2.** On considère la fonction : $f(x) = \arctan(x) - x + \dfrac{x^3}{3}$.

1. Donner la définition de la fonction $\arctan(x)$. Quels sont ses domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ? Quelle est sa dérivée ? Est-ce une fonction paire ou impaire ?

Solution : la fonction $\tan(x)$ est une fonction strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la fonction $\arctan(x)$. Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $\arctan(x)$ est $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. La fonction $\tan(x)$ est impaire donc la fonction $\arctan(x)$ l'est aussi.

2. Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution : $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x + \frac{x^3}{3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
De même $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + \frac{x^3}{3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On peut également remarquer que $f(x)$ est une fonction impaire et que la seconde limite se déduit donc de la première.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{1+x^2}$.

Solution : $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{1+x^2} = \dfrac{(1-x^2)(1+x^2) + x^4}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Montrer que $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer le signe de $f'(x)$. (On pourra utiliser le résultat de la question précédente.)

Solution : $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de fonction dérivable. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \dfrac{x^4}{1+x^2}$ est strictement positif sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^*$ et $f'(0) = 0$.

5. Dresser le tableau des variations de la fonction $f(x)$ sur lequel on reportera les limites trouvées précédemment ainsi que la valeur de $f(x)$ en $x = 0$.

Solution :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6. Déterminer le DL à l'ordre 6 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ en $x = 0$; en déduire le DL à l'ordre 7 de $f(x)$ en $x = 0$.

Solution : $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$ donc $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$. On en déduit que $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^7)$.

7. Montrer que $f(x)$ admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ qu'on notera $f^{-1}(y)$. Quel est le sens des variations de $f^{-1}(y)$?

Solution : La fonction $f(x)$ est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$ et d'après les questions précédentes on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = J$. La fonction $f(x)$ admet donc une fonction réciproque définie sur $J = \mathbb{R}$. Comme $f(x)$ est strictement croissante, $f^{-1}(y)$ l'est aussi.

8. La fonction $f^{-1}(y)$ est-elle dérivable en $y = 0$?

Solution : D'après le cours, si $a \in \mathbb{R}$ et si $b = f(a)$, alors $f^{-1}(y)$ est dérivable en $y = b$ si et seulement si $f(x)$ est dérivable en $x = a$ et si $f'(a) \neq 0$. On a alors $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$. Pour la fonction $f(x)$ étudiée, et pour $a = 0$ on a alors $b = 0$ mais on a $f'(a) = f'(0) = 0$, donc $f^{-1}(y)$ n'est pas dérivable en $y = b = 0$.

9. Dresser le tableau des variations de $f^{-1}(y)$.

Solution :

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left(f^{-1}\right)'(y)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f^{-1}(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

9 pts **Exercice 3.**

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) $y' + 4y = 0$.

Solution : Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y(x) = \lambda e^{-4x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) $y' + 4y = 1$.

Solution : L'équation différentielle (E_1) a une solution évidente qui est la fonction constante $y_1(x) = \frac{1}{4}$.

3. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E_2) $y' + 4y = (x+1)e^{-4x}$.

Solution : on cherche une solution de (E_2) par la méthode de variation de la constante, c.-à.-d. de la forme $y_2(x) = \lambda(x)e^{-4x}$; on a alors $y_2'(x) + 4y_2(x) = \lambda'(x)e^{-4x} = (x+1)e^{-4x}$ d'où $\lambda'(x) = (x+1)$ car $e^{-4x} \neq 0$. Il suffit de prendre $\lambda(x) = \frac{x^2}{2} + x$ d'où $y_2(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^{-4x}$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_3) $y' + 4y = 1 + (x+1)e^{-4x}$.

Solution : On obtient une solution particulière de (E_3) en additionnant les solutions particulières de (E_1) et (E_2). On obtient donc toutes les solutions de (E_3) en additionnant les solutions de (E_0) aux solutions particulières de (E_1) et (E_2). On en déduit que les solutions de (E_3) sont les fonctions $y(x) = \frac{1}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + x + \lambda\right) e^{-4x}$.

5. Déterminer les fonctions $f(x)$ solutions de l'équation différentielle (E_3) et telles que $f(0) = 0$.

Solution : Soit $f(x) = \frac{1}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + x + \lambda\right) e^{-4x}$; on a $f(0) = \frac{1}{4} + \lambda$; il y a donc une seule fonction telle que $f(0) = 0$; elle est obtenue pour la valeur $\lambda = -\frac{1}{4}$; c'est la fonction $f(x) = \frac{1}{4} + \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{4}\right) e^{-4x}$.

15 pts **Exercice 4.**

1. Soit $P = X^2 - i \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes. Déterminer les racines de P :

   1.1 sous la forme $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; on exprimera a et b à l'aide du nombre $\sqrt{2}$;

Solution : Dire que $P(a+ib) = 0$ signifie que $(a+ib)^2 = i$, c.-à.-d. : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$ On en déduit que $a^2 = \frac{1}{2}$ d'où $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On a de même $b^2 = \frac{1}{2}$ d'où $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus a et b sont de même signe car $2ab = 1 > 0$. Les deux racines de P sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   1.2 puis sous la forme $re^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$; on exprimera θ comme multiple du nombre π par un nombre rationnel.

Solution : Dire que $P(re^{i\theta}) = 0$ signifie que $r^2 e^{i2\theta} = i = e^{i\pi/2}$, d'où $r = 1$ et $2\theta = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π ou encore $\theta = \frac{\pi}{4}$ modulo π. Les deux racines de P sont donc $e^{i\pi/4}$ et $e^{i(\pi/4+\pi)} = e^{i5\pi/4}$.

2. Soit $Q = X^2 + i \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer les racines de Q de la même manière que celles de P.

Solution : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\overline{Q(z)} = \overline{z^2 + i} = \overline{z}^2 - i = P(\overline{z})$. On en déduit que z est racine de Q si et seulement si $\overline{z}$ est racine de P. Les racines de Q sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ sous forme cartésienne, ou $e^{-i\pi/4}$ et $e^{-i5\pi/4}$ sous forme polaire.

3. Soit $R = X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Écrire R :

3.1 comme produit de polynômes de degré 1 à coefficients complexes ;

Solution : on a $X^4 + 1 = (X^2 - i)(X^2 + i) = PQ$
or $P = \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $Q = \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
d'où $X^4 + 1 = \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3.2 puis comme produit de polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Solution : Dans l'expression de R comme produit de polynômes de degrés 1 à coefficients complexes, on regroupe les termes qui ont des racines conjuguées, ce qui donne :

$$\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = X^2 - \sqrt{2}X + 1$$

$$\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(X^2 + \sqrt{2}X + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = X^2 + \sqrt{2}X + 1$$

d'où $X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

Autre solution : $X^4 + 1 = (X^4 + 2X^2 + 1) - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.