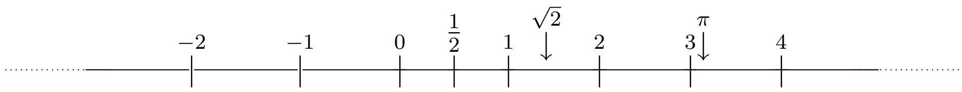
CHAPITRE 1

$\mathbb{R}$, BORNE SUPÉRIEURE ET CONSÉQUENCES

1.1. Propriétés de $\mathbb{R}$

On suppose connus $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, l'anneau des entiers $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ et le corps des rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ s'appellent les entiers positifs (on rappelle que « positif » signifie ≥ 0, tandis que > 0 se dit « strictement positif »), on note aussi $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$ et $\mathbb{Z}_- = -\mathbb{N} = \{0, -1, -2, \ldots\}$. Ici, si A est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, on note $-A = \{-a \mid a \in A\}$. On a aussi $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$, où $\mathbb{Q}_- = -\mathbb{Q}_+$, et $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$. De plus, on note $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+ \setminus \{0\}$ et l'on définit de même $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{N}^*$.

Remarque 1.0. — Les rationnels ne suffisent pas à décrire le monde ; par exemple $\sqrt{2}$ et $\pi = 3,1415926\ldots$ ne sont pas rationnels ! Il faut introduire les nombres réels, qu'on peut se représenter au moyen de la *droite réelle* :



***Théorème 1.1* (Admis).** — *Il existe un unique corps $\mathbb{R}$ caractérisé par les propriétés* (1) *à* (4) *suivantes :*

(1) $\mathbb{R}$ *contient* $\mathbb{Q}$ *et, comme* $\mathbb{Q}$*, il a les propriétés* (2) *et* (3) *ci-dessous :*

(2) $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$*, où* $\mathbb{R}_- = -\mathbb{R}_+$ *et* $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$*,* $\mathbb{R}_+$ *est stable par addition et* $\mathbb{R}_+^*$ *stable par multiplication et par passage à l'inverse. Ces propriétés entraînent que* $\mathbb{R}$ *est muni d'une* relation d'ordre *définie par :* $x \geq y$ *si* $x - y \in \mathbb{R}_+$ *(ce qui équivaut à* $y - x \in \mathbb{R}_-$*). C'est une relation* d'ordre total *(i.e. deux réels* $x \neq y$ *sont toujours comparables puisque* $x - y$ *appartient ou bien à* $\mathbb{R}_+^*$ *ou bien à* $\mathbb{R}_-^*$*), qui est « compatible à la structure de corps » au sens suivant :*

(i) *Pour tout* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, on a :* $x \geq y \iff x + z \geq y + z$.

(ii) *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$*, on a :* $x \geq y \iff rx \geq ry$.

(iii) *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $r \in \mathbb{R}_-^*$*, on a :* $x \geq y \iff rx \leq ry$.

(iv) *Si* $a > b > 0$ *alors* $0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ *et de même, si* $a < b < 0$ *alors* $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$. *(Mais bien sûr, si* $a < 0 < b$ *alors* $\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}$*.)*

(3) $\mathbb{R}$ *est* archimédien, *c.-à-d., pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > x$.

(Q) (4) *Enfin,* $\mathbb{R}$ *possède la* propriété de la borne supérieure *: si* A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *non vide et majorée, alors il existe dans* $\mathbb{R}$ *un plus petit majorant de* A*, appelé la* **borne supérieure** *de* A*.*[1]

[1] Cette question de cours est complétée par la caractérisation de la borne supérieure donnée en 1.3.

Commentaires 1.2. — (a) La relation $\geq$ est bien une relation d'ordre : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \geq x$ et, si $x_1 \geq x_2$ et $x_2 \geq x_1$, alors $x_1 - x_2 \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$, d'où $x_1 = x_2$; enfin, si $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ alors $x_1 - x_2$ et $x_2 - x_3$ sont dans $\mathbb{R}_+$, donc leur somme $x_1 - x_3$ y est aussi, d'où $x_1 \geq x_3$. Ceci montre que $\geq$ est une relation d'ordre. De plus, c'est un *ordre total* : deux réels $x_1 \neq x_2$ sont toujours comparables puisque $x_1 - x_2$ appartient ou bien à $\mathbb{R}_+^*$ ou bien à $\mathbb{R}_-^*$.

(b) On écrira aussi $x \leq x'$ si $x' \geq x$, et $x > x'$ (resp. $x < x'$) si $x \neq x'$ et si $x \geq x'$ (resp. et si $x \leq x'$).

(c) Compatibilité de $\geq$ avec la structure de corps : l'assertion (i) est immédiate, puisque $x - y = (x+z) - (y+z)$. L'assertion (ii) découle du fait que $rx - ry = r(x-y)$ est du même signe ($> 0, = 0$ ou < 0) que $x - y$ si $r \in \mathbb{R}_+^*$. L'assertion (iii) découle de (ii) et du fait que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x \geq y \iff -x \leq -y$, puisque $-y - (-x) = x - y$. Enfin, (iv) découle de l'égalité $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$.

(d) On peut montrer (voir feuilles d'exercices) que la propriété (3) du théorème (connue sous le nom « d'axiome d'Archimède ») découle des propriétés (1), (2), (4), mais ceci n'a pas d'importance pour nous.

***Définitions 1.3* (Majorants, minorants, etc.).** — Si X est un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$, on dit qu'un sous-ensemble A de X est *majoré* s'il existe $M \in X$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$; dans ce cas, on dit que M est un *majorant* de A. Ceci n'implique pas que $M \in A$: par exemple, la partie $A = [0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est majorée par 1, mais $1 \notin A$. Mais si A est majoré par un élément M de A, alors M est nécessairement unique et on l'appelle *le plus grand élément* de A. On définit de même les notions de partie *minorée*, de *minorant*, de *plus petit élément*.

Supposons qu'un sous-ensemble non vide A de X admette une *borne supérieure* b. Alors b est un majorant de A : on a $x \leq b$ pour tout $x \in A$, et c'est le plus petit possible, ce qui signifie que si $c \in X$ vérifie $c < b$, alors c n'est *pas* un majorant de A, donc il existe $x \in A$ tel que $c < x$. Donc le fait que b soit la borne supérieure de A se traduit par les
(Q) deux conditions : [2]

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in A, \text{ on a } x \leq b, \\ \text{pour tout } c \in X \text{ tel que } c < b, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } c < x \leq b. \end{cases}$$

Remarque 1.4. — $\mathbb{R}$ possède aussi la *propriété de la borne inférieure*, c.-à-d., si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, il existe dans $\mathbb{R}$ un plus grand minorant de A, appelé la borne inférieure de A.

En effet, si m est un minorant de A, alors l'ensemble $-A = \{-a \mid a \in A\}$ est majoré par $-m$ donc admet une borne supérieure b. Alors $-b$ est un minorant de A et c'est le plus grand possible, car si $-b < c$ alors $-c < b$ donc il existe $a \in A$ tel que $-c < -a < b$ d'où $-b < a < c$, ce qui montre que c n'est pas un minorant de a.

Remarques 1.5. — (a) Un raisonnement analogue au précédent montre que si on suppose vérifiée la propriété de la borne inférieure, alors celle de la borne supérieure l'est aussi.

(b) Les réels fournissent un outil de calcul très puissant sur des valeurs exactes, même si dans les applications pratiques on ne travaille qu'avec des rationnels ou des valeurs approchées décimales. Si on imagine réaliser des mesures avec une précision de mesure qui croît indéfiniment, on peut se représenter un réel comme une écriture décimale illimitée

$$N + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

où $N \in \mathbb{Z}$ et où chaque chiffre a_i appartient à $\{0, 1, \ldots, 9\}$, la suite illimitée $a_1 a_2 a_3 \ldots$ pouvant être choisie arbitrairement. On sait que tout rationnel $\dfrac{a}{b}$ admet une telle écriture décimale (obtenue en faisant la division euclidienne de a par b), et l'on peut montrer que les rationnels sont précisément les réels dont l'écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang (voir feuilles d'exercices).

Avec ce point de vue, la propriété de la borne inférieure apparaît « intuitivement vraie » : si A est un sous-ensemble non vide et minoré, il existe un unique entier $N \in \mathbb{Z}$ tel que A soit minoré par N mais pas par $N + 1$, puis il existe un unique chiffre $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tel que A soit minoré par N, a_1 mais pas par

[2] Cette caractérisation fait partie de la question de cours sur la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

$\frac{1}{10} + N, a_1$, puis il existe un unique chiffre $a_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tel que A soit minoré par $N, a_1 a_2$ mais pas par $\frac{1}{100} + N, a_1 a_2$, etc. On obtient ainsi une suite de décimaux $d_n = N, a_1 \ldots a_n$ tels que A soit minoré par d_n mais pas par $\frac{1}{10^n} + d_n$, et le réel représenté par l'écriture décimale illimitée $N, a_1 \ldots a_n \ldots$ est la borne inférieure (i.e. le plus grand des minorants) de A.

Remarque 1.6. — La propriété de la borne supérieure n'a rien d'évident. La remarque après l'exemple ci-dessous montre qu'elle est fausse dans $\mathbb{Q}$. En fait, on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ précisément pour qu'il possède la propriété de la borne supérieure, dont on verra plus bas des conséquences importantes, comme le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple 1.7. — L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ est non vide (il contient 1) et est majoré par 2, donc il admet une borne supérieure b (et l'on a $1 \leq b \leq 2$). Montrons que $b = \sqrt{2}$.

(1) Supposons que $b^2 < 2$. Écrivons alors $b^2 = 2 - h$ pour un certain $h > 0$ et ≤ 1 (car $b \leq 1$ donc $b^2 \geq 1$). Montrons alors qu'on peut trouver un réel $x > 0$ assez petit pour que $b + x \in A$, ce qui contredira le fait que b est un majorant de A. Pour tout x, on a

$$(b + x)^2 = b^2 + 2bx + x^2 = 2 - h + x(2b + x).$$

Or, si $0 < x \leq 1$ on a $x(2b + x) \leq x(2b + 1)$, et ceci est $< h$ si x est $< \frac{h}{2b + 1}$. Notons que $\frac{h}{2b + 1} < 1$, donc pour tout x tel que $0 < x < \frac{h}{2b + 1}$, on a $b + x \in A$, ce qui contredit le fait que b est un majorant de A. Cette contradiction montre que $b^2 \geq 2$.

(2) Supposons que $b^2 > 2$ et écrivons alors $b^2 = 2 + h$ pour un certain $h > 0$. Montrons alors que b n'est pas le plus petit majorant de A. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$(b - x)^2 = b^2 - 2bx + x^2 = 2 + h - x(2b - x).$$

Si $0 < x \leq \frac{h}{2b}$ alors on a $x(2b - x) < x2b \leq h$ et donc $(b - x)^2 > 2$. Ceci montre que l'intervalle $[b - \frac{h}{2b}, b]$ ne contient aucun élément de A, ce qui contredit le fait que b est le plus petit majorant de A. Cette contradiction montre que $b^2 \leq 2$, d'où finalement $b^2 = 2$. Donc il existe bien un réel $b > 0$ tel que $b^2 = 2$. Il est unique (car si $c > 0$ et $c^2 = 2$ alors $0 = b^2 - c^2 = (b - c)(b + c)$ et comme $b + c > 0$ ceci entraîne $c = b$) et on le note $\sqrt{2}$.

Remarquons que ce qui précède repose en fait sur la *continuité* de la fonction $x \mapsto x^2$, ce qui nous conduit naturellement à la section suivante : Voisinages et continuité !

Remarque 1.8. — L'ensemble $A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ est non vide (il contient 1) et est majoré par 2. Mais il n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. En effet, s'il y avait une borne supérieure $b \in \mathbb{Q}$, le même raisonnement que plus haut (en prenant $h \in \mathbb{Q}$) donnerait $b = \sqrt{2}$. Or on sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. En effet, sinon on pourrait écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$ ne sont pas tous les deux pairs (sinon on pourrait simplifier la fraction). Mais alors on aurait $2q^2 = p^2$, et comme le carré d'un nombre impair est impair, ceci entraîne que p est pair, disons $p = 2k$, d'où $2q^2 = 4k^2$ et en simplifiant par 2 on obtient $q^2 = 2k^2$, ce qui entraîne que q est pair, contredisant l'hypothèse.

Avant de passer à la section suivante, donnons encore la définition de la valeur absolue, et ses propriétés.

Définition 1.9. — La valeur absolue d'un réel x est $|x| = \mathrm{Max}(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

On a les propriétés suivantes :

(1) $|-x| = |x|$. C'est clair.

(2) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|xy| = |x|\ |y|$. En effet, xy égale $|x|\ |y|$ si x et y sont de même signe, et égale $-|x|\ |y|$ si x et y sont de signes opposés, et il suffit alors d'appliquer (1).

(3) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire). En effet, x et $-x$ sont $\leq |x|$ et y et $-y$ sont $\leq |y|$, donc $x+y$ et $-x-y$ sont $\leq |x|+|y|$, d'où $|x+y| \leq |x|+|y|$.

1.2. Voisinages et fonctions continues

***Définition 1.10* (Intervalles).** — Un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ qui vérifie la propriété suivante : si x, y sont dans I alors tout réel compris entre x et y est aussi dans I. On voit alors qu'il y a 9 types d'intervalles (ci-dessous, on suppose $a \leq b$) :

I	possède un plus grand élément	majoré, ne contient pas sa borne sup	pas majoré
possède un plus petit élément	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
minoré, ne contient pas sa borne inf	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
pas minoré	$]-\infty, b]$	$]-\infty, b[$	$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Un point $x_0 \in I$ est dit un *point intérieur* de I s'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$. On voit que ceci est toujours le cas, sauf si $x_0 = a$ est le plus petit élément de I ou si $x_0 = b$ est le plus grand élément de I.

Les intervalles dont tous les points sont intérieurs sont dits *ouverts* : ce sont les intervalles $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ et $\mathbb{R}$. (ceci inclut $\varnothing$ obtenu pour $a = b$).

Enfin, les intervalles $\varnothing$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $\mathbb{R}$ sont dits *fermés*. (Noter que $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois ouverts et fermés.) Ce sont les intervalles dont le complémentaire dans $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts.

***Définition 1.11* (Fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).** — Si X, Y sont deux ensembles, une *application* $f : X \to Y$ est une loi qui à tout $x \in X$ associe un élément, noté $f(x)$, de Y. Par exemple, on peut considérer l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$.

Lorsque X est une partie de $\mathbb{R}$ et que $Y = \mathbb{R}$, on dit qu'on a une *fonction* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, encore notée f par abus de notation. L'ensemble X sur lequel l'application f est définie s'appelle le domaine de définition de la « fonction f » et est noté D_f : par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Dans ce cours, on ne s'intéressera qu'à des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est une réunion d'intervalles.

***Définition 1.12* (Voisinages).** — Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a dans $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert $]a - \delta, a + \delta[$, pour un certain $\delta > 0$.

***Définition 1.13* (Fonctions continues en un point x_0).** — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que f est *continue* en x_0 si :

(1) pour tout voisinage W de $f(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x) \in W$ pour tout $x \in I \cap V$, cette dernière condition s'écrivant plus brièvement $f(I \cap V) \subset W$.

En particulier, on peut prendre un voisinage $W =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, pour un certain $\varepsilon > 0$, alors (1) entraîne qu'il existe un voisinage V de x_0, contenant donc un intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, tel que $f(I \cap V) \subset W$ d'où, *a fortiori*, $f(I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset W$. Donc la condition (1) entraîne la condition (2) ci-dessous, ainsi que la forme équivalente (3) :

(2) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on ait $f(x) \in \,]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.

(3) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Réciproquement, la condition (2) entraîne la condition (1) : en effet, soit W un voisinage quelconque de $f(x_0)$, alors il contient un intervalle $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, et d'après la condition (2) il existe un intervalle $V = \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, qui est un voisinage de x_0, tel que $f(I \cap V) \subset \,]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$, d'où $f(I \cap V) \subset W$.

> Donc la notion de continuité peut se formuler, au choix, sous l'une des formes équivalentes (1), (2) ou (3).

En fait, il est utile de distinguer les trois cas suivants :

(i) x_0 est un point intérieur de I. Dans ce cas, I contient un intervalle $]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[$ pour un certain $\delta_0 > 0$, donc tout intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta \leq \delta_0$, et la condition (2) se récrit simplement :

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \subset I$ et $f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset \,]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

(ii) $x_0 = a$ est le plus petit élément de I. Alors la condition (2) peut se récrire :

(2*d*) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0, x_0 + \delta[\, \subset I$ et $f([x_0, x_0 + \delta[) \subset \,]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

et dans ce cas, on dira, de façon plus précise, que f est *continue à droite* en $x_0 = a$.

(iii) $x_0 = b$ est le plus grand élément de I. Alors la condition (2) peut se récrire :

(2*g*) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0] \subset I$ et $f(]x_0 - \delta, x_0]) \subset \,]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$

et dans ce cas, on dira, de façon plus précise, que f est *continue à gauche* en $x_0 = b$.

***Définition 1.14* (Continuité sur un intervalle).** — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est *continue sur I* si elle est continue en tout point x_0 intérieur de I et continue à droite en a (resp. continue à gauche en b) si I possède un plus petit élément a (resp. un plus grand élément b).

1.3. Théorèmes des valeurs intermédiaires, des suites adjacentes, des bornes atteintes

La propriété de la borne supérieure a pour conséquences les résultats suivants.

***Théorème 1.15* (des valeurs intermédiaires).** — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Soient $a < b \in I$ et soit y un réel compris entre $f(a)$*
(Q) *et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. Par conséquent :*

> *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Démonstration. — Si y égale $f(a)$ ou $f(b)$, on peut prendre $c = a$ ou $c = b$. Donc on peut supposer $f(a) \neq f(b)$ et y strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Faisons la démonstration lorsque $f(a) < f(b)$. (Le cas où $f(b) < f(a)$ est analogue, ou bien s'y ramène en remplaçant f par $-f$.) Alors, en remplaçant f par la fonction $x \mapsto f(x) - y$, on se ramène au cas où $f(a) < 0 < f(b)$ et $y = 0$. Alors

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$$

est non vide, car il contient a, et est majoré par b, donc possède un borne supérieure $c \leq b$.

(1) $\boxed{\text{On a } f(c) \geq 0.}$ En effet, supposons $f(c) = -m < 0$. Alors, $c < b$ et prenant $\varepsilon = m/2$ on obtient qu'il existe $\delta > 0$ tel que $c + \delta < b$ et $f([c, c+\delta[) \subset]\frac{-3m}{2}, \frac{-m}{2}[$, donc tout $x \in [c, c+\delta[$ appartient à A et c ne majore pas A, contradiction ! Cette contradiction montre que $f(c) \geq 0$, et donc $c > a$.

(2) $\boxed{\text{On a } f(c) \leq 0.}$ En effet, supposons $f(c) = m > 0$. Prenant encore $\varepsilon = m/2$, on obtient qu'il existe $\delta > 0$ tel que $a < c - \delta$ et $f(]c-\delta, c]) \subset]\frac{m}{2}, \frac{3m}{2}[$. Or, comme c est la borne supérieure de A, il existe $x \in A$ tel que $c - \delta < x \leq c$, alors on a $f(x) > 0$ d'après ce qui précède, et $f(x) < 0$ puisque $x \in A$, contradiction ! Cette contradiction montre que $f(c) \leq 0$, d'où finalement $f(c) = 0$.

□

Proposition 1.16. — *Toute suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée converge vers sa borne supérieure. De même, toute suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.*

Démonstration. — Démontrons la 1ère assertion. (La 2ème se démontre de façon analogue.) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. Alors l'ensemble $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré donc admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure α. Alors $a_n \leq \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme α est la borne supérieure de A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$, et comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α, alors pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha$$

et donc $|\alpha - a_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci montre que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$. □

Définition 1.17. — On dit que deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si elles vérifient les conditions suivantes :

(i) l'une est *croissante* et l'autre est *décroissante*,

(ii) $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

(Q) ***Théorème 1.18* (des suites adjacentes)**. — *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, telles que :*

(i) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante,*

(ii) $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Alors elles convergent toutes les deux vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, $a_n \leq \ell \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — La suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc, soit elle est non majorée et tend vers $+\infty$, soit elle est majorée et converge vers sa borne supérieure γ. D'après l'hypothèse (ii), on est dans le second cas et $\gamma = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $a_n - b_n \leq 0$, d'où $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.

Donc la suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par b_0 donc converge vers sa borne supérieure α, et la suite décroissante $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par a_0 donc converge vers sa borne inférieure β. Enfin, l'hypothèse (ii) entraîne que $\alpha = \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $a_n \leq \alpha = \beta \leq b_n$. Ceci prouve le théorème. □

Une variante de ce théorème est la suivante :

***Théorème 1.19* (des intervalles fermés emboîtés).** — *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés bornés $I_n = [a_n, b_n]$ qui est décroissante, c.-à-d. telle que $I_n \supset I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui équivaut à dire que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Alors l'intersection des I_n est l'intervalle fermé borné non vide $[\alpha, \beta]$, où $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\beta = \lim_{n\to+\infty} b_n$.*

En particulier, si $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors l'intersection des I_n est le singleton $\{c\}$ où $c = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Démonstration. — Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Si $p \leq q$, alors $a_p \leq a_q \leq b_q$, et si $p \geq q$, alors $a_p \leq b_p \leq b_q$. Donc :

$$\boxed{\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad a_p \leq b_q.}$$

Fixons q, alors b_q est un majorant des a_p, d'où $\alpha \leq b_q$. Faisant maintenant varier q, ceci montre que α est un minorant des b_q, d'où $\alpha \leq \beta$. On a donc $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ pour tout n, et ceci montre que l'intervalle fermé borné non vide $[\alpha, \beta]$ est contenu dans chaque I_n, donc dans leur intersection.

Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Alors $a_n \leq x \leq b_n$ pour tout n, donc x majore tous les a_n et minore tous les b_n, d'où $\alpha \leq x \leq \beta$, et donc $x \in [\alpha, \beta]$. Ceci montre que l'intersection des I_n est exactement l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$.

Si de plus $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ alors $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$ égale $\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$, et donc $[\alpha, \beta]$ est un singleton. Ceci prouve le théorème. □

Avant d'énoncer et démontrer la dernière conséquence que nous avons en vue, faisons les remarques suivantes, qui seront utiles pour la démonstration.

***Remarques 1.20*.** — Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et soit $C = A \cup B$.

(1) Supposons A et B majorés et soient α et β leurs bornes supérieures. Alors C est majoré et sa borne supérieure est $\max(\alpha, \beta)$.

En effet, quitte à échanger les rôles de A et B, on peut supposer que $\alpha \leq \beta$; alors $\max(\alpha, \beta) = \beta$. Pour tout $x \in C$, on a $x \leq \beta$ si $x \in B$, et $x \leq \alpha \leq \beta$ si $x \in A$. Ceci montre que β majore C. Et pour tout $\varepsilon > 0$, comme β est la borne supérieure de B, il existe $b \in B$ tel que $\beta - \varepsilon < b$, et puisque $b \in C$ ceci montre que β est la borne supérieure de C.

(2) On déduit de ce qui précède les deux choses suivantes :

(a) Si C n'est pas majoré, alors l'un au moins de A, B n'est pas majoré.

(b) Supposons C majoré et soit γ sa borne supérieure. Alors A et B sont majorés (c'est clair) et au moins l'un d'eux a γ comme borne supérieure : en effet, si l'on note α (resp. β) la borne supérieure de A (resp. B), il résulte de (1) que γ égale $\max(\alpha, \beta)$, donc on a $\alpha = \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

(Q) ***Théorème 1.21* (des bornes atteintes).** — *Soient $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$.*

***Explications 1.22*.** — De façon détaillée, ceci signifie que l'ensemble non vide $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ est majoré et minoré, donc admet une borne supérieure M et une borne inférieure m ; de plus, *ces bornes sont atteintes* : il existe c_1 et c_2 dans $[a, b]$, pas nécessairement uniques, tels que $f(c_1) = m$ et $f(c_2) = M$. Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédaires, on sait que $f([a, b])$ est un intervalle, c'est donc l'intervalle fermé $[m, M]$.

Démonstration. — On procède par « dichotomie », c.-à-d. qu'on va couper l'intervalle $[a, b]$ en deux moitiés, choisir l'une des moitiés, puis recommencer, etc. Comme $f([a, b])$ est la réunion des deux ensembles $f([a, \frac{a+b}{2}])$ et $f([\frac{a+b}{2}, b])$ alors, d'après les remarques 1.20 on a ce qui suit :

(1) Si f n'est pas majorée sur $[a, b]$, elle ne l'est pas non plus sur au moins l'un des deux sous-intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$.

(2) Si f est majorée sur $[a, b]$ et si M est la borne supérieure de f sur $[a, b]$, c'est aussi la borne supérieure de f sur au moins l'un des deux sous-intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Ainsi, posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et partant de $I_0 = [a_0, b_0]$, on obtient un intervalle fermé borné $I_1 = [a_1, b_1]$ de longueur moitié $\frac{b-a}{2}$ et tel que :

$$(*) \qquad \begin{cases} f(I_1) \text{ est non majoré si } f(I_0) \text{ ne l'est pas} \\ f(I_1) \text{ a la même borne supérieure que } f(I_0) \text{ si } f(I_0) \text{ est majoré.} \end{cases}$$

On peut alors répéter le processus : on obtient ainsi une suite décroissante

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

d'intervalles fermés bornés, où $I_n = [a_n, b_n]$ est de longeur $\frac{b-a}{2^n}$ et vérifie :

$$(*) \qquad \begin{cases} f(I_n) \text{ est non majoré si } f(I_0) \text{ ne l'est pas} \\ f(I_n) \text{ a la même borne supérieure que } f(I_0) \text{ si } f(I_0) \text{ est majoré.} \end{cases}$$

Comme la suite $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0, il résulte du théorème des intervalles fermés emboîtés (ou du théorème des suites adjacentes) que l'intersection des intervalles I_n est un singleton $\{c\}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ vérifiant $|x - c| < \delta$, on ait $f(x) \in]f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon[$.

Prenons alors n assez grand pour que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ soit $< \delta$. Comme $c \in I_n$, chacune des extrémités de I_n est au plus à distance $b_n - a_n$ de c et comme $b_n - a_n < \delta$, ceci entraîne que tout $x \in I_n$ vérifie $|x - c| < \delta$ et donc $f(x) < f(c) + \varepsilon$. Ceci montre que f est majorée sur I_n, donc sur I_0. Soit alors M la borne supérieure de f sur I_0. Comme c'est aussi la borne supérieure de f sur I_n, il existe $x \in I_n$ tel que $M - \varepsilon < f(x)$. Or, d'après ce qui précède, on a aussi $f(x) < f(c) + \varepsilon$, d'où $M - 2\varepsilon < f(c) \leq M$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $f(c) = M$. Ceci montre que f est majorée sur $[a, b]$ et que la borne supérieure est atteinte. On montre de même que f est minorée sur $[a, b]$ et que la borne inférieure est atteinte. $\square$

Remarques 1.23. — 1) L'image de $[0, 4\pi]$ par la fonction continue sin est $[-1, 1]$ et 1 (resp. -1) est l'image de $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ (resp. de $\frac{3\pi}{2}$ et de $\frac{3\pi}{2} + 2\pi$).

2) Il n'y a pas de résultat analogue pour les autres types d'intervalles. Par exemple, la fonction $x \mapsto 1/x$ envoie les intervalles bornés $]0, 1[$ (resp. $]0, 1]$) sur les intervalles non bornés $]1, +\infty[$ (resp. $[1, +\infty[$), et envoie l'intervalle fermé $[1, +\infty[$ sur l'intervalle non fermé $]0, 1]$.

1.4. Propriétés des fonctions continues

***Proposition 1.24* (Composition)**. — *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications, où I, J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$.*

(i) *Soit $x_0 \in I$. On suppose que f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$. Alors l'application composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est continue en x_0.*

(ii) *Si f est continue sur I et g continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.*

Démonstration. — Démontrons (i). Fixons $\varepsilon > 0$. Comme g est continue en $f(x_0)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(1) \qquad g\big(J \cap]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[\big) \subset]g(f(x_0)) - \varepsilon, g(f(x_0)) + \varepsilon[\,.$$

Puis, comme f est continue en x_0, il existe $\delta' > 0$ tel que l'image par f de $I \cap]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$ soit contenue dans $]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[$, et bien sûr cette image est contenue dans $f(I)$, qui par hypothèse est contenu dans J, donc on a :

$$(2) \qquad f\big(I \cap]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[\big) \subset J \cap]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[.$$

Combinant (1) et (2), on obtient $g\Big(f\big(I \cap]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[\big)\Big) \subset]g(f(x_0)) - \varepsilon, g(f(x_0)) + \varepsilon[$. Ceci montre que $g \circ f$ est continue en x_0 et prouve (i). Enfin, (ii) est conséquence de (i). $\square$

Remarque 1.25. — Faisons ici une remarque (qui aurait pu figurer après la définition 1.10 des intervalles), qui sera utile dans la démonstration du point (iii) de la proposition qui suit.

Si I, J sont deux intervalles, il résulte de la définition que $I \cap J$ est un intervalle : en effet, si l'on a $x \leq y$ dans $I \cap J$ et si $z \in [x, y]$, alors z appartient à I (puisque I est un intervalle) et aussi à J (idem) donc à $I \cap J$. Ceci montre que $I \cap J$ est un intervalle (éventuellement $\varnothing$). En particulier, si I, J sont deux intervalles contenant un réel x_0, alors $I \cap J$ est un intervalle contenant x_0 (donc non vide !).

***Proposition 1.26* (Opérations algébriques)**. — *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications, continues en un point $x_0 \in I$.*

(i) (*Combinaisons linéaires*) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $\lambda f + g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda f(x) + g(x)$ est continue en x_0.*

(ii) (*Produits*) *L'application $fg : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en x_0.*

(iii) (*Inverse*) *Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est définie sur $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ pour δ assez petit, et est continue en x_0.*

Démonstration. — (3) (i) Il n'y a rien à montrer si $\lambda = 0$, donc on peut supposer $\lambda \neq 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f et g sont continues en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on ait :

$$(1) \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Explicitement, on trouve un δ_1 (resp. δ_2) tel que (1) (resp. (2)) soit vérifié pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \delta_1$ (resp. $< \delta_2$), alors $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ convient.) Alors, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\Big|\big(\lambda f(x) + g(x)\big) - \big(\lambda f(x_0) + g(x_0)\big)\Big| = \big|\lambda(f(x) - f(x_0)) + g(x) - g(x_0)\big| \leq$$
$$|\lambda|\,|f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lambda f + g$ est continue en x_0.

(ii) Comme $f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$, on a :

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|\,|g(x)| + |f(x_0)|\,|g(x) - g(x_0)|.$$

On veut montrer que le terme de droite est « petit » si x est « suffisamment proche » de x_0. D'abord, comme g est continue en x_0, elle est bornée au voisinage de x_0 : en prenant $\varepsilon = 1$, on obtient qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$, on ait $|g(x) - g(x_0)| < 1$, d'où $|g(x)| = |g(x) - g(x_0) + g(x_0)| < 1 + |g(x_0)|$. Posons alors $M = \sup(|f(x_0)|, 1 + |g(x_0)|)$.

(3) Cette démonstration ne sera sans doute pas donnée en cours, car on démontrera en cours une proposition analogue pour les limites dans le Chap. 2.

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme f et g sont continues en x_0, il existe $\delta > 0$, qu'on peut supposer $< \delta_1$, tel que, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{et} \qquad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

d'où

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

et ceci montre que fg est continue en x_0.

(iii) Supposons $g(x_0) = m > 0$. (Le cas où $g(x_0) = -m < 0$ se traite de façon analogue). Montrons d'abord que g reste > 0 sur $I \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$, pour un certain $\delta_1 > 0$. Pour cela, fixons $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_1 < m$, par exemple $\varepsilon_1 = m/2$. Alors il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$ on ait

$$0 < \frac{m}{2} = g(x_0) - \varepsilon_1 < g(x) < g(x_0) + \varepsilon_1 = \frac{3m}{2}.$$

Donc la fonction $h : x \mapsto h(x) = 1/g(x)$ est définie sur $I \cap]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$, qui est, d'après la remarque 1.25, un intervalle contenant x_0 qu'on va noter I_1.

Montrons maintenant que h est continue en x_0. Pour tout $x \in I_1$, on a

$$|h(x) - h(x_0)| = |\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} < \frac{2}{m^2}|g(x_0) - g(x)|,$$

où l'inégalité provient du fait que, pour tout $x \in I_1$, on a $g(x) > \dfrac{m}{2}$ d'où $\dfrac{1}{g(x)} < \dfrac{2}{m}$ et donc $\dfrac{1}{g(x)g(x_0)} < \dfrac{2}{m^2}$. Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme g est continue en x_0, il existe $\delta > 0$, qu'on peut supposer $< \delta_1$, tel que, pour tout $x \in I_1 \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on ait $|g(x) - g(x_0)| < \dfrac{m^2}{2}\varepsilon$, et donc $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. Ceci montre que $h = 1/g$ est définie sur I_1 et continue en x_0. Enfin, f est aussi définie sur I_1 (puisque $I_1 \subset I$), donc par le point (ii) la fonction $f/g = fh$ est définie sur I_1 et continue en x_0. □

***Remarque 1.27* (sur les « combinaisons linéaires »)**. — Le point (i) entraîne que si f_1, f_2 sont des fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues en x_0 et si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda_1 f_1$ est continue, ainsi que la fonction $\lambda_2 f_2$, et que leur somme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. En procédant par récurrence sur n, on obtient ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues en x_0, alors la fonction $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

De la proposition on déduit immédiatement la conséquence suivante :

***Corollaire 1.28* (Opérations algébriques)**. — *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur I.*

(i) (*Combinaisons linéaires*) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $\lambda f + g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda f(x) + g(x)$ est continue sur I.*

(ii) (*Produits*) *L'application $fg : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue sur I.*

(iii) (*Inverse*) *Si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur I.*

En utilisant le corollaire précédent, on peut déjà montrer que certaines fonctions usuelles sont continues. En effet, il est clair que la fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le point (i) du corollaire 1.28, la fonction $x \mapsto x^2$ est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en procédant par récurrence on obtient que la fonction $x \mapsto x^n = xx^{n-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ (et aussi pour $n = 0$, avec la convention que $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

En tenant compte de la remarque 1.27, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Une telle fonction s'appelle une *fonction polynomiale* (on dit aussi « un polynôme en x »). On peut montrer qu'une telle fonction P s'annule au plus n fois sur $\mathbb{R}$, sauf si tous les a_i sont nuls, auquel cas P est la fonction nulle. D'après le point (iii) du corollaire 1.28, on obtient donc le :

Corollaire 1.29. — *Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions polynomiales, Q n'étant pas la fonction nulle. Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ où Q ne s'annule pas.*