CHAPITRE 4

LOGARITHME, EXPONENTIELLE, SINUS, COSINUS : 1ÈRE APPROCHE

Commençons par des ajouts au chap. 3. D'abord, une condition *suffisante* pour l'existence d'un extremum local d'une fonction dérivable, puis quelques figures.

Corollaire 3.29.1. — *Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I, et $c \in I$. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert non vide $J =]c-\delta, c+\delta[$ contenu dans I tel que, pour tout $x \in J$ on ait $f'(x) \geq 0$ si $x \leq c$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \geq c$ (resp. $f'(x) \leq 0$ si $x \leq c$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \geq c$). Alors f admet en c un maximum (resp. minimum) local.*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le 1er cas (le 2ème étant analogue). L'hypothèse entraîne que f est croissante sur $]c-\delta, c]$ et décroissante sur $[c, c+\delta[$, d'où $f(x) \leq f(c)$ pour tout x dans $]c-\delta, c]$ ou dans $[c, c+\delta[$. Donc f admet en c un maximum local. □

Remarque 3.29.2. — (1) Si les hypothèses du corollaire sont vérifiées et si de plus f' ne s'annule pas sur $J \setminus \{c\}$, c.-à-d. si $f'(x) > 0$ pour $x \in]c-\delta, c]$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in [c, c+\delta[$ (resp. si $f'(x) < 0$ pour $x \in]c-\delta, c]$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in [c, c+\delta[$), alors on dit que « f' s'annule et change de signe en c ». Le corollaire est souvent énoncé dans ce cas particulier sous la forme : si f' s'annule et change de signe en c, alors f admet en c un extremum local.

(2) Le corollaire donne une condition *suffisante* d'existence d'un extremum local, mais cette condition n'est pas nécessaire : la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2(1 + \sin(1/x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs ≥ 0, donc admet en $c = 0$ un miminimum local. Mais pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x(1+\sin(1/x)) - \cos(1/x)$ prend des valeurs > 0 et < 0 dans chaque intervalle $]-\delta, 0[$ ou $]0, \delta[$, pour tout $\delta > 0$.

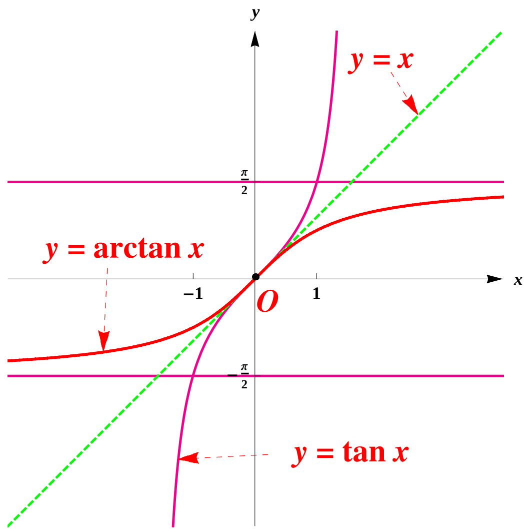

FIG. 1. Interprétation graphique du théorème de l'application réciproque.

Des figures donnant l'allure du graphe de $x \mapsto x^n$ pour n impair ou n pair. [1]

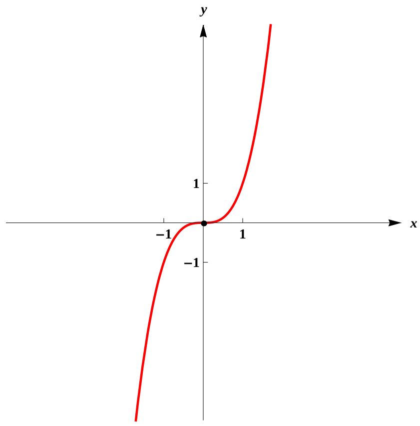

FIG. 2. Graphe de $x \mapsto x^n$ pour n impair (ici $n = 3$).

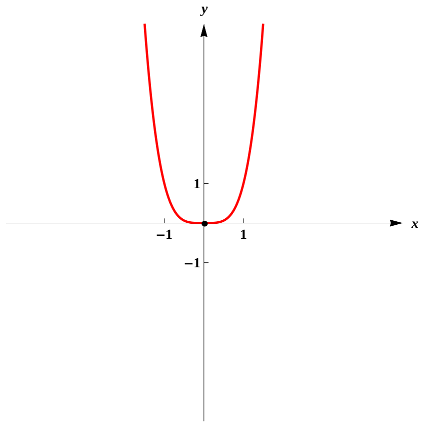

FIG. 3. Graphe de $x \mapsto x^n$ pour n pair (ici $n = 4$).

4.1. Une construction du logarithme puis de l'exponentielle

***Définition 4.1* (Logarithme népérien).** — Dans ce chapitre, on *admet* l'existence de la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. C'est l'unique fonction dérivable $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui vérifie $f'(x) = 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(1) = 0$.

Remarque 4.2. — L'unicité est facile : si $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable vérifiant $g'(x) = 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors la fonction $h = g - \ln$ vérifie $h' = 0$ donc est égale à la constante $h(1) = g(1)$, d'où $g(x) = g(1) + \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (et donc $g = \ln$ si $g(1) = 0$).

L'existence demande plus de travail. Après avoir vu les intégrales dans le cours 1M002, vous verrez que la fonction

$$f : x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $1/x$, et vérifie $f(1) = 0$, d'où $\ln(x) = f(x)$.

[1] Toutes les figures de ce chapitre sont tirées du livre *Mathématiques L1* par C. David et S. Mustapha, à paraître (Dunod, printemps 2014) et nous ont été aimablement communiquées par C. David.

(qq) ***Proposition 4.3.*** — *On a* $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. *Par conséquent, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n \in \mathbb{Z}$ *on a* $\ln(1/x) = -\ln(x)$ *et* $\ln(x^n) = n\ln(x)$. [2]

Démonstration. — Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(xy) - \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$h'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$$

donc est constante de valeur $h(1) = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$. On a donc $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $\ln(1) = 0$, on obtient aussitôt que $\ln(1/x) = -\ln(x)$. D'autre part, pour $n \geq 2$ on montre que $\ln(x^n) = n\ln(x)$ par récurrence sur n (en prenant $y = x^{n-1}$). Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\ln(x^{-n}) = \ln(1/x^n) = -\ln(x^n) = -n\ln(x).$$

Enfin, l'égalité est vraie aussi pour $n = 0$, puisque par convention la fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1. □

Proposition 4.4. — *La fonction* ln *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Comme $\ln'(x) = 1/x > 0$, la fonction ln est strictement croissante. En particulier $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Donc quand n tend vers $+\infty$, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ tend vers $+\infty$ et $\ln(1/2^n) = -n\ln(2)$ tend vers $-\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. □

Définition 4.5. — On définit l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ comme l'application réciproque de ln. C'est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; en particulier on a

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

D'autre part, comme $\ln(1) = 0$ on a $\exp(0) = 1$.

(qq) ***Théorème 4.6.*** — (i) *L'application* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $\exp' = \exp$.

(ii) *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie* $f' = f$, *alors* $f(x) = f(0)\exp(x)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *En particulier,* exp *est l'unique application dérivable* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$.

(ii) *On a* $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$. *En particulier,* $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ *et l'on a* $\exp(nx) = \exp(x)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — (i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, ln est dérivable en t de dérivée $1/t \neq 0$. Donc, d'après le théorème de l'application réciproque, l'application exp est dérivable au point $x = \ln(t)$, de dérivée :

$$\exp'(x) = \exp'(\ln(t)) = \frac{1}{\ln'(t)} = t = \exp(x).$$

Ceci montre que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\exp' = \exp$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f' = f$. Alors la fonction $g(x) = f(x)\exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$g'(x) = f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp'(-x) = 0$$

donc $g(x)$ est la constante $c = g(0) = f(0)$, et l'on a $f(x) = f(0)\exp(x)$ donc $f = f(0)\exp$. En particulier, si $f(0) = 1$ alors $f = \exp$.

---

[2] Le symbole (qq) signale des résultats **à savoir** et supposés connus depuis la Terminale.

(iii) Fixons $y \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x+y)\exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$h'(x) = \exp'(x+y)\exp(-x) - \exp(x+y)\exp'(-x) = 0.$$

Donc h est constante, de valeur $h(0) = \exp(y)$. Donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $\exp(0) = 1$, ceci donne en particulier $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$. D'autre part, pour $n \geq 1$ on montre que $\exp(nx) = \exp(x)^n$ par récurrence sur n (en prenant $y = (n-1)x$). Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\exp(-nx) = \exp(-x)^n = \exp(x)^{-n}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

(Q)

Proposition 4.7. — *On a* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty.}$

Démonstration. — [3] Soit $x > 1$. D'après le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]1, x[$ tel que $\ln(x) = (x-1)\ln'(c) = (x-1)/c$, et comme $c > 1$ on obtient :

$$\forall x > 1, \qquad \ln(x) < x - 1 < x.$$

Appliquant ceci à $\sqrt{x}$ et utilisant que $\ln(x) = \ln\left((\sqrt{x})^2\right) = 2\ln(\sqrt{x})$, on obtient :

$$\forall x > 1, \qquad \sqrt{x} > \ln(\sqrt{x}) = \frac{\ln(x)}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{\ln(x)} > \frac{\sqrt{x}}{2}$$

et d'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$. □

Corollaire 4.8. — *On a* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty.}$

Démonstration. — Posons $h(x) = \exp(x)/x$. On a $h(x) = g(\exp(x))$, où $g(t) = t/\ln(t)$. Comme $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, on déduit du théorème sur la limite d'une application composée (2.25) que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. □

On pourrait améliorer de suite la proposition et le corollaire précédents, en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, les fonctions $\exp(x)/x^n$ et $x/\ln(x)^n$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Mais on va d'abord introduire, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^a$.

(Q)

Définition et proposition 4.9. — *On pose* $\boxed{x^a = \exp(a\ln(x))}$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) *Pour a fixé, la fonction « puissance a »* $p_a : x \mapsto x^a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *de dérivée* $x \mapsto ax^{a-1}$. *Pour* $a = 0$, p_0 *est la fonction constante égale à* 1.

(ii) *Pour* $a > 0$, *on a* $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$, *donc* p_a *se prolonge par continuité en* a.

(iii) *Pour* $a < 0$, *on a* $\lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x^a = 0^+$.

(iv) *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $x^a x^b = x^{a+b}$.

[3] La démonstration fait partie de la question de cours.

Démonstration. — (i) D'après le théorème sur la dérivabilité des fonctions composées, la fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto a\exp(a\ln(x))/x$ et comme $1/x = \exp(-\ln(x))$ et $\exp(y)\exp(z) = \exp(y+z)$, alors $a\exp(a\ln(x))/x$ égale

$$a\exp\big(a\ln(x) - \ln(x)\big) = a\exp\big((a-1)\ln(x)\big) = ax^{a-1}.$$

Pour $a = 0$, on a $x^0 = \exp(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(ii) et (iii) résultent du théorème sur la limite d'une application composée (2.25) et des résultats sur les limites en 0^+ et $+\infty$ de ln, et en $\pm\infty$ de exp.

(iv) On a $x^a x^b = \exp(a\ln(x))\exp(b\ln(x)) = \exp\big((a+b)\ln(x)\big) = x^{a+b}$. □

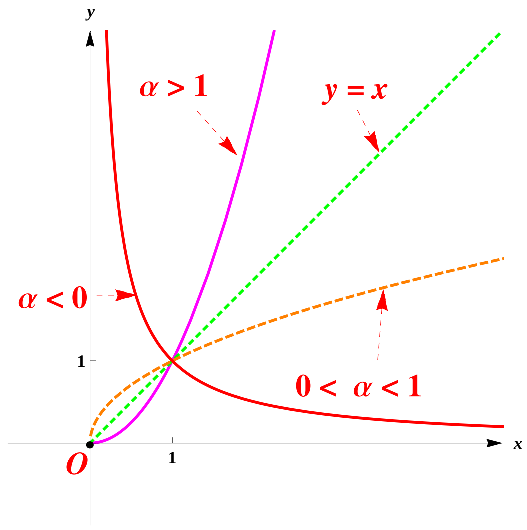

FIG. 4. Allure du graphe de $x \mapsto x^\alpha$ selon la valeur de α.

(Q) ***Proposition 4.10* (Croissance comparée).** — *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.*

(i) *On a* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{\ln(x)^b} = +\infty.}$ *On retiendra le slogan :* « En $+\infty$ l'exponentielle croît plus vite que toute fonction puissance, et toute fonction puissance croît plus vite que n'importe quelle puissance du logarithme. »

(ii) *On a* $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^a\,|\ln(x)|^b = 0^+.}$

(iii) $\boxed{\textit{Si } a > 1 \textit{ on a } \lim_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty.}$

Démonstration. — (i) Posons $g(x) = \exp(ax)/x^b$ et $f(x) = \ln(g(x)) = ax - b\ln(x)$. Alors $f(x) = \ln(x)(a\dfrac{x}{\ln(x)} - b)$. Compte tenu de la proposition 4.7 et de l'hypothèse $a > 0$, quand x tend vers $+\infty$ les deux facteurs tendent vers $+\infty$ donc il en est de même de $f(x)$. Comme $g(x) = \exp(f(x))$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Ceci prouve la 1ère assertion de (i). Comme $x^a/\ln(x)^b = g(\ln(x))$ la 2ème en découle, d'après le théorème sur la limite d'une application composée (2.25).

(ii) découle de (i) car si x tend vers 0^+ alors $t = 1/x$ tend vers $+\infty$ donc $t^a/\ln(t)^b$ tend vers $+\infty$. Or pour $x \in]0,1[$ on a : $x^a|\ln(x)|^b = \ln(t)^b/t^a$ donc ceci tend vers 0^+.

(iii) est une reformulation de la 1ère assertion de (i), car $a^x = \exp(\ln(a)x)$ et l'hypothèse $a > 1$ équivaut à $\ln(a) > 0$. □

Notation 4.11. — On note $e = \exp(1)$.[4] Alors $\ln(e) = 1$ donc, avec la notation introduite en 4.9, on a $e^x = \exp(\ln(e)x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Désormais, on notera la plupart du temps e^x au lieu de $\exp(x)$.

4.2. Fonctions sin, cos, tan et leurs réciproques

Les fonctions sinus et cosinus ont été introduites en classe de Seconde : dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, sur lequel on place le point I de coordonnées $(1, 0)$, et l'on oriente le cercle dans le sens « trigonométrique » (sens inverse des aiguilles d'une montre). À tout réel $x \geq 0$ (resp. ≤ 0) on associe le point $M(x)$ du cercle obtenu en partant de I et en parcourant sur le cercle la longueur x en tournant dans le sens trigonométrique (resp. dans le sens opposé) ; on a donc $M(x + 2\pi) = M(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit alors $\cos(x)$ et $\sin(x)$ comme les coordonnées de $M(x)$, i.e. $M(x)$ est le point de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$. Comme $M(x)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, on a donc

$$\boxed{\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.} \tag{4.2.1}$$

D'autre part, on a la notion intuitive *d'angle orienté* : tout couple (P, Q) de points de $\mathscr{C}$ définit l'angle orienté θ formé par les demi-droites $[OP)$ et $[OQ)$ prises dans cet ordre, et deux couples (P, Q) et (P', Q') définissent le même angle si par une rotation de centre O on peut amener P' sur P et Q' sur Q. Comme par rotation on peut amener P sur I, on voit que se donner un angle θ revient à se donner un point Q_θ de $\mathscr{C}$, et l'on note $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ les coordonnées de Q_θ. Si φ est un second angle et si on fait tourner la demi-droite $[OI)$ pour l'amener sur $[OQ_\varphi)$, alors la demi-droite $[OQ_\theta)$ est amenée sur la demi-droite $[OQ_{\theta+\varphi})$. En utilisant les propriétés des rotations, on peut en déduire les formules suivantes :[5]

(qq)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\theta + \varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) &= \cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi) \end{aligned}} \tag{4.2.2}$$

Par des arguments géométriques sur des longueurs et des aires on peut montrer que, pour tout $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[\, \setminus \{0\}$, on a :

$$1 < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} \qquad \text{et} \qquad 0 < \left| \frac{\cos(x) - 1}{x} \right| < \frac{|x|}{2}$$

d'où l'on déduit que :[6]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0. \tag{4.2.3}$$

Ceci montre que sin et cos sont dérivables en 0, avec $\sin'(0) = 1$ et $\cos'(0) = 0$. D'après les formules (4.2.2), pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\frac{\sin(a + h) - \sin(a)}{h} = \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} + \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h}$$

$$\frac{\cos(a + h) - \cos(a)}{h} = \cos(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h}$$

et d'après (4.2.3) le premier (resp. second) rapport tend vers $\cos(a)$ (resp. $-\sin(a)$). On a donc obtenu le :

---

[4] On a $e = 2,7182818\ldots$

[5] On les prouvera dans un chapitre ultérieur.

[6] La 2ème limite peut aussi se déduire de la 1ère, en utilisant la formule $1 - \cos(x) = 2\sin(x/2)^2$.

(qq) ***Théorème 4.12.*** — *Les fonctions* sin *et* cos *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$.

Étudions alors les variations de cos et sin.

(1) Comme $\sin(x) > 0$ pour $x \in]0, \pi[$, alors $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ pour $x \in]0, \pi[$ donc cos est une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$.

(2) Comme $\cos(-x) = \cos(x)$ (i.e. cos est une fonction *paire*), on obtient le graphe de cos sur $[-\pi, 0]$ en faisant la symétrie par rapport à la droite verticale $y = 0$. Puis, comme cos est 2π-périodique, on obtient son graphe sur $\mathbb{R}$ tout entier par translation.

(3) Comme $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors sin est une bijection strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$.

(4) Comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et comme le symétrique x' de x par rapport à la droite verticale $y = \pi/2$ est donné par $x' - \pi/2 = -(x - \pi/2)$ c.-à-d. $x' = \pi - x$, on obtient le graphe de sin sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$ en faisant la symétrie par rapport à la droite $y = \pi/2$. Puis, comme sin est 2π-périodique, on obtient son graphe sur $\mathbb{R}$ tout entier par translation.

(5) D'après (4.2.2) on a $\sin(x + \dfrac{\pi}{2}) = \cos(x)$: ceci dit que le graphe de sin s'obtient en décalant celui de cos de $\pi/2$ « vers la droite ».

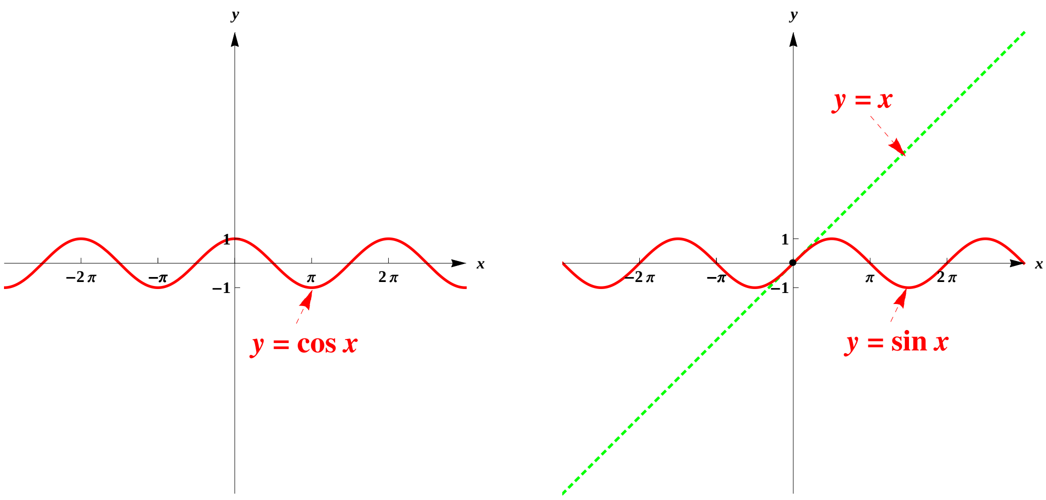

FIG. 5. Les fonctions *cosinus* et *sinus*, avec la tangente en 0 pour *sinus*.

D'autre part, il résulte de (1) et (3) que la restriction de la fonction cos à l'intervalle $I_{\cos} = [0, \pi]$ (resp. de sin à l'intervalle $I_{\sin} = [-\pi/2, \pi/2]$) est une bijection strictement monotone de $I_{\cos}$ (resp. $I_{\sin}$) sur $[-1, 1]$. On a donc des applications réciproques, continues, $\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ et $\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.

(Q) ***Théorème 4.13.*** — (i) Arccos *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $]-1, 1[$ *et*

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Par contre, Arccos *n'est pas dérivable à gauche en* $1 = \cos(0)$, *ni dérivable à droite en* $-1 = \cos(\pi)$.

(ii) Arcsin *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $]-1, 1[$ *et*

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Par contre, Arcsin *n'est pas dérivable à droite en* $-1 = \sin(-\pi/2)$, *ni dérivable à gauche en* $1 = \sin(\pi/2)$.

(iii) *Pour tout* $x \in [-1, 1]$, *on a* $\boxed{\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \pi/2.}$

Démonstration. — Comme $\cos'(t) = -\sin(t)$ est $\neq 0$ pour $t \in]0,\pi[$ alors d'après le théorème de l'application réciproque, pour tout $t \in]0,\pi[$ on a

$$\operatorname{Arccos}'(\cos(t)) = \frac{1}{\cos'(t)} = \frac{-1}{\sin(t)}.$$

De plus, on a $\sin(t) = \sqrt{1-\cos(t)^2}$ pour $t \in [0,\pi]$, puisque $\sin \geq 0$ sur cet intervalle et que $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Comme l'application $t \mapsto x = \cos(t)$ est une bijection de $]0,\pi[$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$, on obtient donc que Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et $\operatorname{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Par contre, Arccos n'est pas dérivable à gauche en $1 = \cos(0)$, ni dérivable à droite en $-1 = \cos(\pi)$, puisque $\cos' = \sin$ s'annule en 0 et π. Ceci prouve (i).

De même, comme $\sin'(t) = \cos(t)$ est $\neq 0$ pour $t \in]-\pi/2,\pi/2[$ alors d'après le théorème de l'application réciproque, pour tout $t \in]-\pi/2,\pi/2[$ on a

$$\operatorname{Arcsin}'(\sin(t)) = \frac{1}{\sin'(t)} = \frac{1}{\cos(t)}.$$

De plus, on a $\cos(t) = \sqrt{1-\sin(t)^2}$ pour $t \in [-\pi/2,\pi/2]$, puisque $\cos \geq 0$ sur cet intervalle et que $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Comme l'application $t \mapsto x = \sin(t)$ est une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$, on obtient donc que $\operatorname{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Par contre, Arcsin n'est pas dérivable à droite en $-1 = \sin(-\pi/2)$, ni dérivable à gauche en $1 = \sin(\pi/2)$, puisque $\sin' = \cos$ s'annule en $\pm\pi/2$. Ceci prouve (ii).

Enfin, en comparant (i) et (ii) on voit que Arccos + Arcsin a une dérivée nulle, donc est la fonction constante de valeur $\operatorname{Arccos}(0) + \operatorname{Arcsin}(0) = \pi/2$. Ceci prouve (iii). □

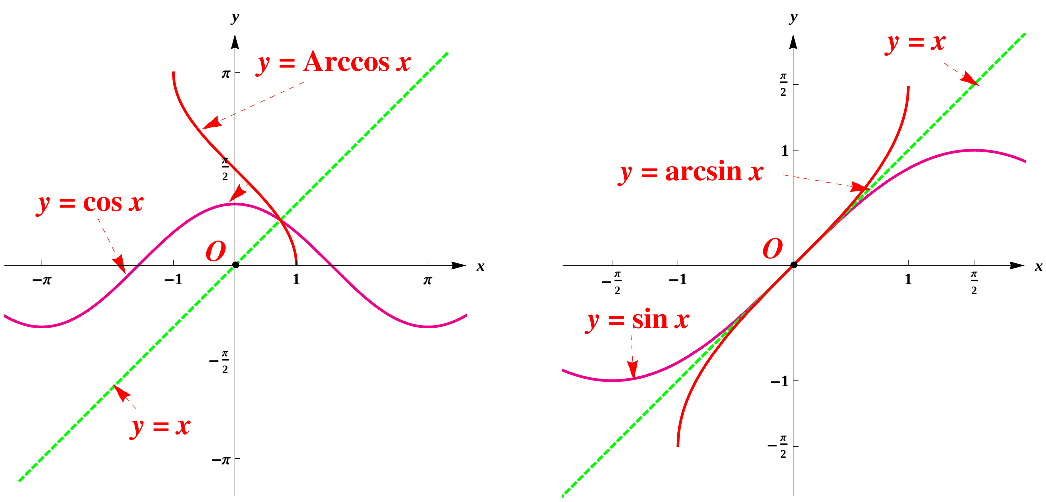

FIG. 6. Les fonctions *Arccosinus* et *Arcsinus*.

Passons maintenant à la fonction tangente $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$; elle est définie en tout $x \in \mathbb{R}$ où $\cos(x) \neq 0$.

(Q) ***Théorème 4.14.*** — (i) *Le domaine de définition de* tan *est la réunion, pour n variant dans $\mathbb{Z}$, des intervalles $I_n =]\frac{-\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$, ce qu'on note :*

$$D_{\tan} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]\frac{-\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[\ .$$

(ii) *La fonction* tan *est périodique de période π.*

(iii) *Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a* $\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2.}$

(iv) *On a* $\boxed{\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \tan(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty}$. *Par conséquent,* tan *est une bijection strictement croissante de $I_0 =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.*

(v) *On note* Arctan *l'application réciproque. Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. — Dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, cos ne s'annule qu'en $-\pi/2$ et en $\pi/2 = -\pi/2 + \pi$ donc, cos étant 2π-périodique, on obtient que $\cos(x) = 0$ si et seulement si x est de la forme $\pm\frac{\pi}{2} + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Le point (i) en découle.

Comme $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ et $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction tan est périodique de période π, d'où (ii). Par conséquent, il suffit de l'étudier sur l'intervalle I_0. Son graphe sur $\mathbb{R}$ tout entier s'obtiendra alors par translation.

Pour tout $x \in D_{\tan}$, la dérivée de $\tan(x) = \sin(x)\dfrac{1}{\cos(x)}$ est :

$$\tan'(x) = 1 - \sin(x)\frac{-\sin(x)}{\cos(x)^2} = 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

(Ceci est aussi égal à $1/\cos(x)^2$, mais la forme $1+\tan(x)^2$ est plus intéressante.) Ceci prouve (iii).

En particulier, tan est strictement croissante sur I_0. De plus, lorsque x tend vers $-\pi/2$ par valeurs supérieures (resp. vers $\pi/2$ par valeurs inférieures) alors $\cos(x)$ tend vers 0^+ et $\sin(x)$ vers $\sin(-\pi/2) = -1$ (resp. vers $\sin(\pi/2) = 1$), d'où :

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \tan(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty.$$

Il en résulte que tan est une bijection strictement croissante de $I_0 =]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve (iv).

Sur $\mathbb{R}$ tout entier, le graphe de la fonction tan a donc l'allure suivante :

Prouvons maintenant (v). Comme $\tan'(t) = 1 + \tan(t)^2 \neq 0$ pour tout $t \in I_0$ alors, d'après le théorème de l'application réciproque, pour tout $t \in I_0$ on a

$$\mathrm{Arctan}'(\tan(t)) = \frac{1}{\tan'(t)} = \frac{1}{1+\tan(t)^2}$$

Donc Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

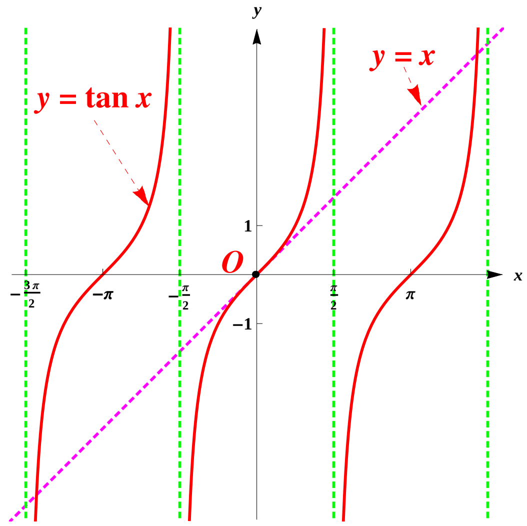

FIG. 7. La fonction *tangente*, avec la droite tangente au graphe en O.

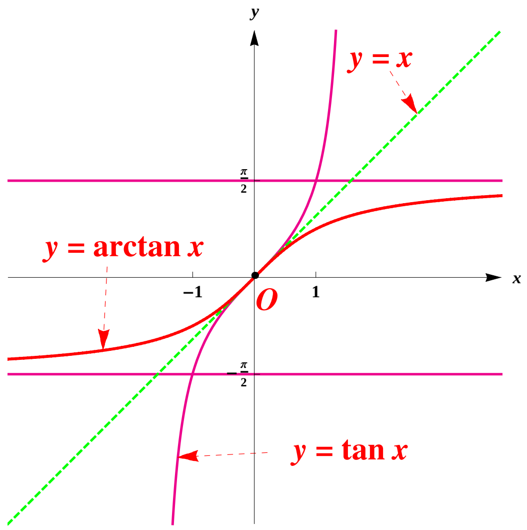

FIG. 8. La fonction *Arctangente*.

4.3. Fonctions sh, ch, th et leurs réciproques

(Q) ***Définition et proposition 4.15.*** — *On définit les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques par : pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(i) *La fonction* ch *est paire et les fonctions* sh *et* th *sont impaires.*

(ii) *Ces fonctions sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x), \qquad \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{sh}(x)\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.

(iv) *On a* $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

Démonstration. — (i) est immédiat. Puisque exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto e^{-x}$ est la composée de $x \mapsto -x$ et de exp, alors ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$. De plus, $\mathrm{ch}(x)$ est > 0 donc $\neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc th est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est comme indiqué. Ceci prouve (ii). Le point (iii) découle de ce que la limite de exp en $+\infty$ (resp. $-\infty$) est $+\infty$ (resp. 0).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-\mathrm{ch}(x) < \mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$ (car $\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = e^x > 0$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} > 0$) et donc $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$. De plus, comme

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

et $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 = \lim_{x \to +\infty} e^{-2x}$, alors $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$. $\square$

Étudions maintenant les variations des fonctions sh, ch et th.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$, donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme sa limite en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est $-\infty$ (resp. $+\infty$), c'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{sh}(0) = 0$ et pour $x > 0$ on a $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x) < 0 < \mathrm{sh}(x)$.

(2) Comme $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, on a le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, la restriction de ch à $\mathbb{R}_+$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

(3) Comme $|\mathrm{th}(x)| < 1$ alors $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}(x)^2$ est > 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme sa limite en $-\infty$ (resp. $+\infty$) est -1 (resp. 1), c'est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

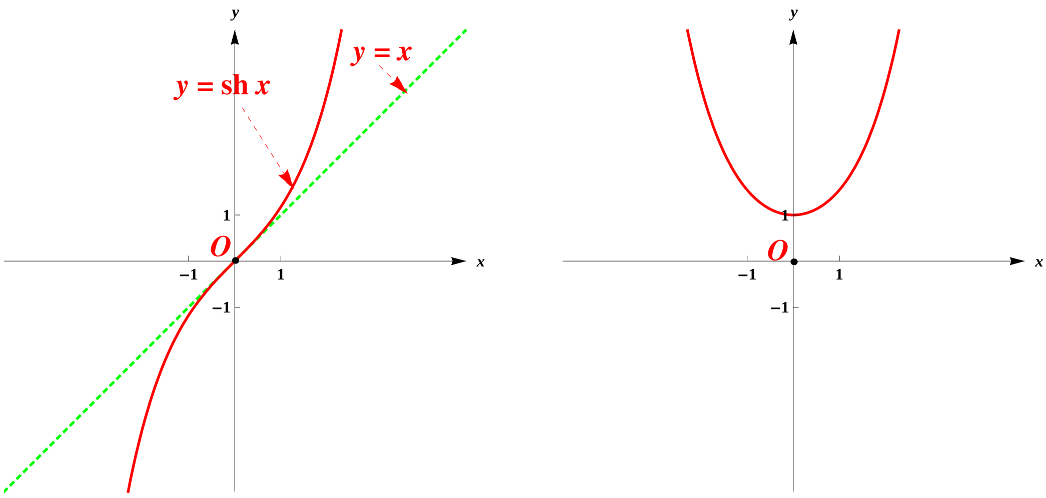

FIG. 9. Les fonctions sh et ch, avec la tangente en O pour sh.

Remarque 4.16. — Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on rappelle que :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \qquad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \qquad \text{et donc} \qquad (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

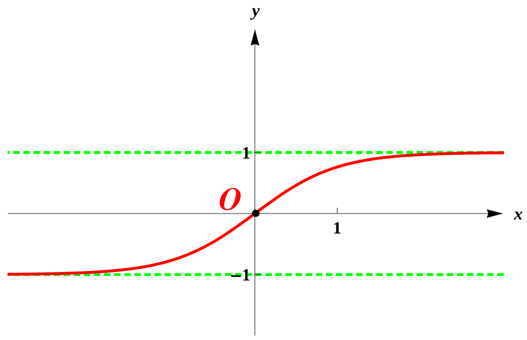

FIG. 10. La fonction tangente hyperbolique.

Appliquons ceci à $a = e^x/2$ et $b = e^{-x}/2$, alors $4ab = 1$ et l'on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1.} \tag{4.3.1}$$

(Q) ***Théorème 4.17***. — (i) *On note* Argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application réciproque de* sh. *Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(ii) *On note* Argch : $[1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *l'application réciproque de* ch : $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$. *Elle est dérivable sur* $]1, +\infty[$*, de dérivée* $\mathrm{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. *Par contre, elle n'est pas dérivable à droite en* 1.

(ii) *On note* Argth : $]-1, 1[\to \mathbb{R}$ *l'application réciproque de* th. *Elle est dérivable sur* $]-1, 1[$*, de dérivée* $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{sh}'(t) = \mathrm{ch}(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de l'application réciproque, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{Argsh}'(\mathrm{sh}(t)) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$$

De plus, on a $\mathrm{ch}(t) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}(t)^2}$ puisque $\mathrm{ch}(t) > 0$ et $\mathrm{ch}(t)^2 = 1 + \mathrm{sh}(t)^2$. Il en résulte que Argsh est dérivable en tout point $x = \mathrm{sh}(t)$ de $\mathbb{R}$ et l'on a $\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Ceci prouve (i).

Comme $\mathrm{ch}'(t) = \mathrm{sh}(t)$ est > 0 pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ alors d'après le théorème de l'application réciproque, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\mathrm{Argch}'(\mathrm{ch}(t)) = \frac{1}{\mathrm{ch}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{sh}(t)}$$

De plus, pour $t \in \mathbb{R}_+$ on a $\mathrm{sh}(t) = \sqrt{\mathrm{ch}(t)^2 - 1}$ puisque $\mathrm{sh} \geq 0$ sur cet intervalle et que $\mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2 - 1$. Comme l'application $t \mapsto x = \mathrm{ch}(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$, on obtient donc que Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ de dérivée $\mathrm{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Par contre, Argch n'est pas dérivable à droite en $1 = \mathrm{ch}(0)$, puisque $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ s'annule en 0. Ceci prouve (ii).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{th}'(t) = 1 - \mathrm{th}(t)^2 > 0$ donc, d'après le théorème de l'application réciproque, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{Argth}'(\mathrm{th}(t)) = \frac{1}{\mathrm{th}'(t)} = \frac{1}{1 - \mathrm{th}(t)^2}$$

Donc Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Ceci prouve (iii). $\square$

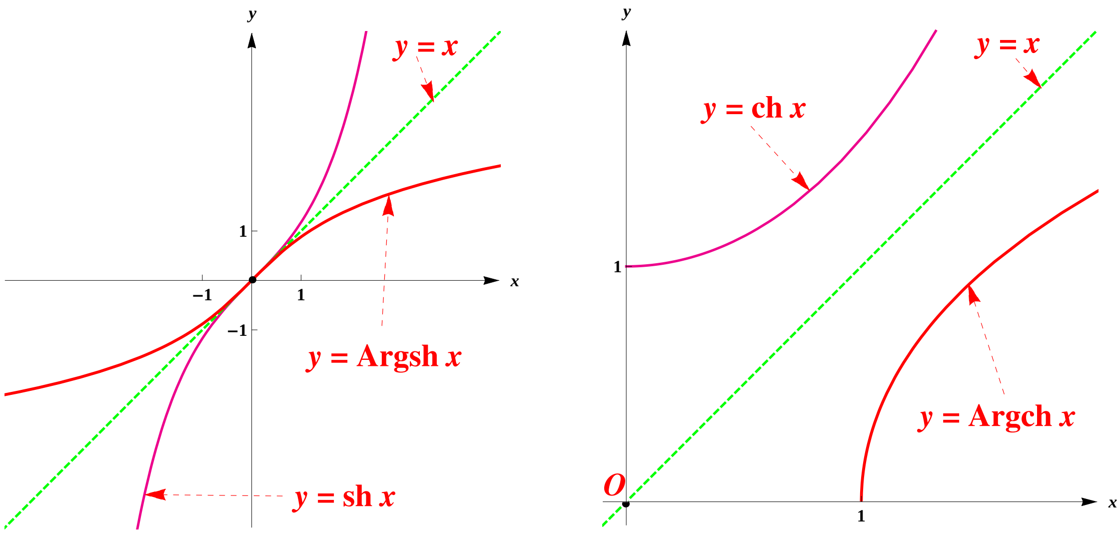

FIG. 11. Les fonctions Argsh et Argch.

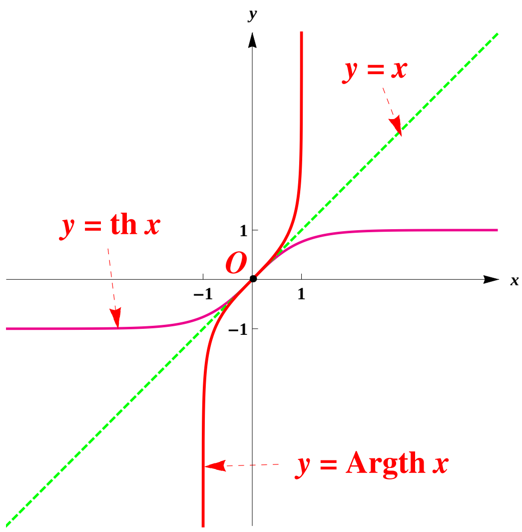

FIG. 12. La fonction Argth.