# Feuille 1 : $\mathbb{R}$, continuité, limites

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours » mais certains peuvent aussi être traités comme apportant un autre éclairage sur des notions vues en cours ou des exercices précédents. Toutefois, les évaluations ne comporteront pas d'exercices du type $(**)$.

**Exercice 1.** VRAI ou FAUX ?

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ ; les cinq propositions suivantes sont équivalentes :
   - (i) $x = y$
   - (ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x-y| < \varepsilon$
   - (iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, |x-y| < \varepsilon$
   - (iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*, |x-y| < \dfrac{1}{n}$
   - (v) $\forall n \in \mathbb{N}, |x-y| < \dfrac{1}{10^n}$
2. On a $0,99999\cdots = 1$

**Exercice 2** (Relations d'ordre)**.** On « rappelle » que si $X$ est un ensemble, une relation $x \leq y$ est une *relation d'ordre* si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in X,\ x \leq x$.

(ii) $\forall x, y \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

On dit de plus que $\leq$ est un *ordre total* si deux éléments quelconques sont comparables, c.-à.-d., si pour tout $x, y \in X$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.
On rappelle que $\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, où $i^2 = -1$. On définit une relation $\leq$ sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante : si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on déclare que $z \leq z'$ si $a < a'$ ou bien si $a = a'$ et $b \leq b'$.

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.
2. Est-ce un ordre total ?
3. Déterminer l'ensemble, noté ici $\mathbb{C}_+$, des éléments qui sont $\geq 0$.

Dans les deux questions suivantes, justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

4. Si $z, z' \in \mathbb{C}_+$, a-t-on $z + z' \in \mathbb{C}_+$ ?
5. Si $z, z' \in \mathbb{C}_+$, a-t-on $zz' \in \mathbb{C}_+$ ?

**Exercice 3.** Dire pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ s'il est majoré, minoré. Déterminer, lorsqu'elle existe, la borne supérieure et la borne inférieure.

1. $A_1 = \{1 + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,
2. $A_2 = \{1 - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,
3. $A_3 = \{\dfrac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Indication : comment peut-on écrire autrement $\dfrac{n-1}{n+1}$ ?
4. $A_4 = \{\dfrac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,
5. $A_5 = \{0,\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ décimales}} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

**Exercice 4.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant $a \leq b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

**Exercice 5.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et soient $\sup(A)$ et $\sup(B)$ leurs bornes supérieures. On note

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majoré et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

**Exercice 6** (Continuité de la valeur absolue et compléments)**.** On considère la fonction valeur absolue : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |x|$.

1. Rappeler « l'inégalité triangulaire » vérifiée par la valeur absolue.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
3. En déduire que la fonction valeur absolue, considérée comme fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est continue.

Plus généralement, une *distance* sur un ensemble $X$ (par exemple $X = \mathbb{R}^2$, voir exo 21 plus bas) est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
(a) pour tout $x, y \in X$, on a : $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
(b) pour tout $x, y \in X$, on a : $d(x, y) = d(y, x)$.
(c) (Inégalité triangulaire) pour tout $x, y, z \in X$, on a : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

4. (∗∗) En utilisant (c) et (b), montrer que pour tout $x, y, z \in X$, on a $|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$.

**Exercice 7** (Partie entière d'un réel)**.** En utilisant que $\mathbb{R}$ est archimédien, montrer que pour tout réel $x$ il existe un unique entier $N \in \mathbb{Z}$ tel que $N \leq x < N + 1$. On l'appelle la *partie entière* de $x$ et on le note $E(x)$. Déterminer $E(\sqrt{2})$, $E(\frac{29}{7})$ et $E(\frac{-3}{2})$.

**Exercice 8.** Le but de cet exercice est de montrer qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la somme $S_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n$ des $(n + 1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $x$, vaut :

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Supposons $|x| < 1$. Alors $x^{n+1}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $S_n(x)$ tend vers $\dfrac{1}{1-x}$. On exprime ceci en disant que la « somme infinie » $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ vaut $\dfrac{1}{1-x}$, ou encore que « la série de terme général $x^k$ converge » vers $\dfrac{1}{1-x}$. Par conséquent, la somme infinie $x + x^2 + x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ vaut $\dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{1 - (1 - x)}{1 - x} = \dfrac{x}{1-x}$. On peut aussi voir cela en écrivant que pour $n \in \mathbb{N}^*$ chaque somme partielle $T_n(x) = x + \cdots + x^n$ égale $xS_{n-1}(x)$, donc la suite $T_n(x) = xS_{n-1}(x)$ converge vers $\dfrac{x}{1-x}$.

1. Soit $x$ un réel dont l'écriture décimale est périodique, disons de période $d$, à partir du $(r + 1)$-ième chiffre après la virgule, c.-à.-d.
$$x = N, a_1 \dots a_r b_1 \dots b_d b_1 \dots b_d b_1 \dots b_d \dots$$
où $N \in \mathbb{Z}$ et où les $a_i$ et $b_j$ sont des chiffres $\in \{0, 1, \dots, 9\}$. On note $A$ l'entier $a_1 \dots a_r$ et $B$ l'entier $b_1 \dots b_d$. Montrer alors que $x$ est la somme du décimal $N, a_1 \dots a_r = \dfrac{10^r N + A}{10^r}$ et du rationnel
$$\frac{B}{10^r} \times \frac{\frac{1}{10^d}}{1 - \frac{1}{10^d}} = \frac{B}{10^r} \times \frac{1}{10^d - 1}.$$
Conclure que $x$ est rationnel.
2. (∗) Réciproquement, soit $x \in \mathbb{Q}$ et soit $N = E(x)$ sa partie entière, c.-à.-d., le plus grand entier $n \leq x$. Alors $x = N + y$ où $y$ est un rationnel tel que $0 \leq y < 1$. On peut supposer que $y > 0$ (car sinon $x = N$ et c'est fini) et donc $y = \dfrac{r}{d}$, avec $r, d \in \mathbb{N}^*$ et $r < d$. On peut alors faire la « division euclidienne de $r$ par $d$ », exactement comme on le fait pour écrire que $\dfrac{1}{3} = 0,333333\dots$ C.-à-d., comme $r < d$ alors $10d > 10r$ donc la division euclidienne de l'entier $10r$ par l'entier $d$ donne un quotient $q_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ (donc un seul chiffre !) et l'on a : $10r = dq_1 + r_1$, avec le nouveau reste $r_1 \in \mathbb{N}$ qui vérifie $r_1 < d$. Donc
$$\frac{r}{d} = \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{r_1}{d}$$

puis on peut recommencer : le même argument donne que $10r_1 = dq_2 + r_2$ avec $q_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $r_2 \in \mathbb{N}$ et $r_2 < d$, d'où

$$\frac{1}{10}\frac{r_1}{d} = \frac{q_2}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{r_2}{d}$$

et donc

$$\frac{r}{d} = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{1}{100} \times \frac{r_2}{d}$$

etc. On peut écrire ceci sous la forme d'une division usuelle, où à gauche on « abaisse un zéro » à chaque fois. Illustrons ceci sur deux exemples :

$$\begin{array}{l|l}
166 & 55 \\ \hline
\ \ 100 & 3,01818\cdots \\
\ \ \ \ 450 & \\
\ \ \ \ \ \ 100 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 450 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ddots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
149 & 74 \\ \hline
\ \ 100 & 2,0135135\cdots \\
\ \ \ \ 260 & \\
\ \ \ \ \ \ 380 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 100 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 260 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 380 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ddots &
\end{array}$$

Revenant au cas général, posons $r_0 = r$. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_k = 0$, alors $x$ est un décimal. Sinon, si $r_i \neq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe deux entiers $i, j$, avec $0 \leq i < j < d$, tels que $r_i = r_j$ et en déduire que le développement décimal de $x$ est périodique à partir du $(i+1)$-ième chiffre après la virgule, de période $j - i$.

**Exercice 9** $(**)$**.** Le but de cet exercice est de montrer que la propriété de la borne supérieure entraîne déjà que $\mathbb{R}$ est archimédien. Soit $\mathbb{K}$ un corps contenant $\mathbb{Q}$, muni d'un ordre total compatible à la structure de corps, et vérifiant la propriété de la borne supérieure, et donc aussi celle de la borne inférieure. On note $\mathbb{K}_+^*$ (respectivement $\mathbb{K}_-^*$) l'ensemble des éléments $x$ de $\mathbb{K}$ qui sont $> 0$ (resp. $< 0$).

1. Pour tout $x \in \mathbb{K}_+^*$ montrer que $\dfrac{x}{2}$ est dans $\mathbb{K}_+^*$ (montrer qu'il ne peut être $\leq 0$) et est $< x$.
2. Montrer que l'ensemble $\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ admet dans $\mathbb{K}$ une borne inférieure $m \geq 0$.
3. En utilisant la question 1, montrer que $m = 0$.
4. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{K}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < y$.
5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{K}_+^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < n$.

**Exercice 10.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f$ et $g$ deux applications $I \to \mathbb{R}$, continues en un point $x_0 \in I$.

(a) On suppose que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in I \cap V$.

(b) On suppose que $f(x_0) > g(x_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage $I$ de $x_0$ tel que $f$ est strictement plus grande que $g$ sur $I \cap V$.

(c) Ces énoncé sont-ils encore vrais si l'on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges ?

**Exercice 11.** Un cycliste parcourt 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure lors duquel il parcourt exactement 10 km. Indication : l'application $f$ qui au temps $t$ écoulé depuis le départ du cycliste, associe la distance $f(t)$ parcourue au temps $t$ est continue, et l'on a $f(0) = 0$ et $f(60) = 20$, si le temps est mesuré en minutes et la distance en kilomètres. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction continue $t \mapsto g(t)$ bien choisie.

**Exercice 12.** Soient $I$ un intervalle non vide et $f$ une fonction continue sur $I$. On suppose que $f$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur $I$. Montrer qu'alors $f$ est constante. Donner un contre-exemple lorsque $f$ n'est pas supposée continue.

**Exercice 13.** Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f$ une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$. (Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction continue $g$ bien choisie.)

**Exercice 14.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g$ deux applications continues $I \to \mathbb{R}$ telles que $|f| = |g|$. On suppose que $f$ ne s'annule pas sur $I$.

1. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Indication : montrer que $f$ et $g$ gardent un signe constant sur $I$.
2. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse de continuité ? Ou l'hypothèse de non annulation ?

**Exercice 15.** En utilisant des résultats du cours, montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3+x+1}{x^4-4}$ est continue sur les intervalles $]-\infty, -\sqrt{2}[$, $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et $]\sqrt{2}, +\infty[$.

**Exercice 16** ($*$ Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et conséquences)**.** 1. En utilisant que $\mathbb{R}$ est archimédien, montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < r$.

2. En déduire que quelques soient $y < x$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel $\dfrac{p}{n}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$) tel que $y < \dfrac{p}{n} < x$. Ceci montre que : $\boxed{\text{Tout intervalle ouvert non vide de } \mathbb{R} \text{ contient un rationnel}}$ (et donc une infinité de rationnels). On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.
3. (Cette question n'est pas utilisée dans la suite.) Soient $y < x$ dans $\mathbb{R}$. En considérant $r = \dfrac{x-y}{2\sqrt{2}}$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $y < \dfrac{p\sqrt{2}}{n} < \dfrac{(p+1)\sqrt{2}}{n} < x$. En déduire que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels est également dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Calculer $f(0)$ et montrer que $f$ est impaire.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $f(n)$ en fonction de $n$ et de $a = f(1)$.
6. Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(p)$ en fonction de $f(\dfrac{p}{q})$ et en déduire la valeur de $f(\dfrac{p}{q})$.
7. On suppose que $f$ est continue. Montrer alors que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Indication : appliquer l'exercice 10(a) à l'application continue $x \mapsto f(x) - ax$ et utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 17.** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$, $g$ deux applications continues $I \to \mathbb{R}$. Pour tout $x \in I$, on pose $M(x) = \max(f(x), g(x))$, et $m(x) = \min(f(x), g(x))$. Montrer que $M$ et $m$ sont continues. En déduire une autre démonstration du fait que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue.

**Exercice 18.** Soit $f$ une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $f$ n'est pas la fonction nulle. Montrer alors que $f(0) = 1$.
2. On suppose $f$ continue en 0. Montrer alors que $f$ est continue en tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 19.** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle fermé borné $I$. On suppose que $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$. En utilisant un théorème du cours, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \geq \varepsilon$ pour tout $x \in I$. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus l'intervalle fermé borné ?

**Exercice 20** (Fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$)**.** On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé usuel $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où $O$ est le point $(0,0)$ et $\overrightarrow{i}$ (respectivement $\overrightarrow{j}$) est le vecteur d'origine $O$ et d'extrémité le point $(1,0)$ (respectivement le point $(0,1)$).
Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ et tout point $P_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$, on note $D(P_0, r)$ le disque ouvert de centre $P_0$ et de rayon $r$, et l'on note $C(P_0, r)$ le carré ouvert de coté $2r$ centré en $P_0$, c.-à.-d.,

$$C(P_0, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 - r < x < x_0 + r, \quad y_0 - r < y < y_0 + r\}.$$

1. Soit $K$ le point $(1,1)$. Faire un dessin représentant $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le point $K = (1,1)$, le disque $D(K,1)$, le carré $D(K,1)$, puis le disque $D(K, \sqrt{2})$.
2. En faisant un dessin analogue, montrer que pour tout point $P \in \mathbb{R}^2$, tout disque ouvert $D(P,r)$ centré en $P$ contient un carré ouvert $C(P, r')$ centré en $P$, et réciproquement.

Soit $P_0 \in \mathbb{R}^2$. Un *voisinage* de $P_0$ dans $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble $W$ de $\mathbb{R}^2$ qui contient un disque ouvert centré en $P_0$ ou un carré ouvert centré en $P_0$ : cela revient au même d'après la question précédente. On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est *continue* en $P_0 = (x_0, y_0)$ si pour tout voisinage $V$ de $f(x_0, y_0)$ dans $\mathbb{R}$, il existe un voisinage $W$ de $(x_0, y_0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(W) \subset V$. On dit que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ si elle est continue en tout point $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$.

3. ($**$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de deux variables. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $f$ est continue au sens de la définition précédente.
   (ii) pour tout $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et tout intervalle ouvert $I$ centré en $f(x_0, y_0)$, il existe un carré ouvert $C(P_0, r)$ tel que $f(C(P_0, r)) \subset I$.
   (iii) pour tout $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et tout intervalle ouvert $I$ centré en $f(x_0, y_0)$, il existe un disque ouvert $D(P_0, r)$ tel que $f(C(P_0, r)) \subset I$.

   On pourra montrer, par exemple, que si (i) est vérifié alors (ii) l'est aussi, puis que si (ii) est vérifié alors (iii) l'est aussi, et enfin que si (iii) est vérifié alors (i) l'est aussi.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est *continue* si pour tout voisinage $V$ de $f(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$, il existe un voisinage $W$ de $(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(W) \subset V$.

4. ($**$) Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $f$ est continue au sens de la définition précédente.
   (ii) pour tout $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et tout carré ouvert $C$ centré en $f(x_0, y_0)$, il existe un carré ouvert $C(P_0, r)$ tel que $f(C(P_0, r)) \subset C$.
   (iii) pour tout $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et tout disque ouvert $D$ centré en $f(x_0, y_0)$, il existe un disque ouvert $D(P_0, r)$ tel que $f(D(P_0, r)) \subset D$.

   On pourra montrer, par exemple, que si (i) est vérifié alors (ii) l'est aussi, puis que si (ii) est vérifié alors (iii) l'est aussi, et enfin que si (iii) est vérifié alors (i) l'est aussi. On peut aussi sauter cette question, en disant que « la démonstration est analogue » à celle de la question précédente.
5. ($**$) Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ est continue. Indication : utiliser la caractérisation (ii) de la question précédente.
6. ($**$) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ est continue.

**Exercice 21** ($**$ Deux distances sur $\mathbb{R}^2$)**.** Pour deux points $P = (p_1, p_2)$ et $Q = (q_1, q_2)$, on définit $d(P, Q) = \max\big(|q_1 - p_1|, |q_2 - p_2|\big)$.

1. Montrer que $d$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (voir exo 6 pour la définition).

On peut aussi munir $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne usuelle, définie par $d_2(P, Q) = \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + (q_2 - q_1)^2}$. Dans ce cas, « l'inégalité triangulaire » est l'inégalité triangulaire usuelle : « la somme des longeurs de deux côtés d'un triangle est inférieure à la longueur du dernier côté » et est supposée connue. (La démonstration « algébrique » à partir de la formule $d_2(P, Q) = \cdots$ n'est pas si facile.)

2. On fixe un point $P_0 \in \mathbb{R}^2$ (par exemple $P_0 = (0, 0)$). En utilisant les exos 6 et 20 montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q \mapsto d(P_0, Q)$ est continue, et de même pour la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q \mapsto d_2(P_0, Q)$.

**Exercice 22.** Étudier les suites dont le terme général est :

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \qquad b_n = \frac{3n-3}{2n+3}, \qquad c_n = (-1)^n, \qquad d_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad e_n = \frac{n \sin n}{n^2+1}.$$

**Exercice 23.** Pour des suites réelles, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Toute suite positive et non majorée tend vers $+\infty$.
(b) Toute suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
(c) Si une suite admet une limite $\ell > 0$, alors tous ses termes sont $> 0$ à partir d'un certain rang.
(d) Toute suite non bornée diverge.
(e) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Alors les deux suites convergent et ont même limite.
(f) Si une suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

**Exercice 24.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les trois. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Indication : noter $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ les trois limites ci-dessus et montrer que $\ell_1 = \ell_3$ et $\ell_2 = \ell_3$.

**Exercice 25.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x^4-4}$. Déterminer les limites :

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x), \qquad \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x), \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x), \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)$$

**Exercice 26.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+ax+c} - \sqrt{x^2+bx+d}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**Exercice 27.** On rappelle que la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $f$ la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

1. Citer des résultats du cours qui assurent que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. On rappelle que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée cos. Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. $f$ est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

**Exercice 28.** Soit $f$ une fonction continue définie sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(2x)$ si $x \leq 1/2$ et $g(x) = f(2x-1)$ si $x > 1/2$. Montrer que $g$ est continue sur $[0,1]$.

**Exercice 29.** Déterminer les réels $a, b$ et $c$ pour lesquels les fonctions $f$ et $g$ définies pour tout réel $x$ par les formules suivantes sont continues :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -2 \\ ax+b & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} (x-1)e^{2/x} & \text{si } x < 0 \\ 3e^x - c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

**Exercice 30.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$. On suppose que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. $(*)$ En utilisant le critère de Cauchy, montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.

**Exercice 31.** (Théorème de Césaro) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergente de limite $\ell$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n}$ converge aussi vers $\ell$.
Montrer que la réciproque est fausse en donnant un exemple simple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ non convergente telle que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

**Exercice 32.** On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes $z_n = a_n + ib_n$, où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$, converge vers le nombre complexe $\ell = a + ib$, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $b$.

1. On suppose que les suites $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$.

On rappelle que le module de $z_n$, noté $|z_n|$, est le réel $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

2. Même question sous l'hypothèse que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. (Se ramener à la question précédente).