Feuille 3 : fonctions usuelles (suite), développements limités et formules de Taylor

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Ceux marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais des exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Dans cette feuille, on écrira « $\mathrm{DL}_n(a)$ de f » pour désigner le DL_n de f au voisinage de a.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = \mathrm{Arctan}(1/x)$.

1. Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Déterminer la valeur de $\mathrm{Arctan}(x) + f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$.

Exercice 2. On rappelle le tableau suivant :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

1. Donner le $\mathrm{DL}_4(\pi/3)$ de $\cos(x)$, c.-à.-d. le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $h \mapsto \cos(\dfrac{\pi}{3} + h)$.
2. Donner le $\mathrm{DL}_4(\pi/6)$ de $\sin(x)$, c.-à.-d. le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $h \mapsto \sin(\dfrac{\pi}{6} + h)$.

Exercice 3. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les $\mathrm{DL}_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad k(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2. Donner le $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\dfrac{x^3}{1-x}$.

Exercice 4.

1. Donner le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $F(x) = \ln(1-x)$ et de $G(x) = \ln(1+x)$.
2. On rappelle qu'on note $e = \exp(1)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e+ex) - \sin(x) - \cos(x)}{x\ln(1+x^2)}$.
3. Donner le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $H(x) = \mathrm{Argth}(x)$ et de $K(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{Arctan}(x) + \cos(\sqrt{2}x) - 1}{\sin(x^2)\ln(1+x^2)}$

Exercice 5. Donner : 1. Le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{\mathrm{ch}(x)+\cos(x)}{2} - 1$. 2. Le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\dfrac{\mathrm{sh}(x)+\sin(x)}{2} - x\cos(x^2)$.

Exercice 6 (Produit de développements limités)**.**

1. Calculer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\sin(x)\,\mathrm{ch}(x)$.
2. Calculer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 7 (Composition de développements limités)**.** Calculer les développements limités suivants :

1. $\mathrm{DL}_6(0)$ de $e^{\cos(x)}$
2. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
3. $\mathrm{DL}_3(0)$ de e^{e^x}.
4. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{1-x}}$.
5. $\mathrm{DL}_5(\pi/2)$ de $\ln(\sin(x))$
6. $\mathrm{DL}_2(\pi/2)$ de $\sin(x)^x$
7. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.

Exercice 8.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f_n(h) = \sqrt[n]{1+nh} = (1+nh)^{1/n}$.
2. Soient $p \neq q$ dans $\mathbb{N}^*$. D'une part, déterminer le signe au voisinage de $h = 0$ de $f_p(h) - f_q(h)$. D'autre part, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[p]{x^{2p} - px^{2p-1}} - \sqrt[q]{x^{2q} - qx^{2q-1}}$.
3. $(*)$ Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f_p(h)$, puis de $f_p(h)f_q(h)$.
4. $(*)$ Déterminer le signe au voisinage de $h = 0$ de $\sqrt[2]{1+2h}\sqrt[5]{1+5h} - \sqrt[3]{1+3h}\sqrt[4]{1+4h}$.
5. $(**)$ Soient $k, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $k + n = p + q$. Déterminer le signe de $f_k(h)f_n(h) - f_p(h)f_q(h)$ au voisinage de $h = 0$.

Exercice 9 (Dérivation du DL d'une fonction C^∞)**.** Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur I.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f(a+h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \cdots + b_{n+1} h^{n+1} + o(h^{n+1})$ le DL_{n+1} en a de f. En utilisant des résultats du cours, montrer que f' admet en a un DL_n, qui est donné par :
$$f'(a+h) = b_1 + 2b_2 h + \cdots + (n+1) b_{n+1} h^n + o(h^n).$$
2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Calculer, par récurrence sur k, la dérivée k-ième $f^{(k)}(x)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g_k(x) = \dfrac{1}{(1-x)^k}$.

Exercice 10. On rappelle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{x}{p}$ désigne le polynôme $\dfrac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{p!}$. Sa valeur en un entier $n \geq p$ est le coefficient binomial $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dbinom{-k}{p} = (-1)^p \dbinom{p+k-1}{p} = (-1)^p \dbinom{p+k-1}{k-1}$.
2. Donner le DL_n en 0 de $(1-x)^\alpha$ pour $\alpha = -k$. Comparer avec la formule obtenue dans l'exercice 9.

Exercice 11. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes au point a considéré.

1. $\dfrac{\cos(x) - 1}{x \ln(1+x)}$ en $a = 0$.
2. $\dfrac{x \ln(1+x) - x^2}{\sin(x)^3}$ en $a = 0$.
3. $\dfrac{e^x - e}{x^3 + x^2 - x - 1}$ en $a = 1$.
4. $\dfrac{\ln(1+x) + 1 - \sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) - x}$ en $a = 0$.

Exercice 12. Donner l'équation de la tangente au graphe de la fonction $x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$ au point $a = 0$. Préciser la position en ce point du graphe par rapport à la tangente.

Exercice 13. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f(x) = \dfrac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^x - e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x)$ existe et la calculer. Donc f se prolonge par continuité en la fonction F définie par $F(0) = \ell$ et $F(x) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer que F est dérivable en 0.
4. Soit Γ_F le graphe de F. Écrire l'équation de la tangente à Γ_F en 0 [c.-à.-d. au point $(0, F(0))$] et préciser la position de Γ_F par rapport à cette tangente au voisinage de $x = 0$.

Exercice 14. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, déterminer sans calculatrice :

1. une valeur approchée à 10^{-5} près des nombres : $\sqrt{4,0008}$, $\ln(1,003)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{1000}\right)$.
2. $(*)$ une valeur approchée à 10^{-3} près de $\cos(\pi/5)$, en prenant comme valeurs approchées $\pi = 3,14$ et $\cos(\pi/4) = 0,707$.

Exercice 15. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} < e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Que peut-on dire si $x \in \mathbb{R}_-^*$?
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, montrer que la suite définie par $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers $\exp(x)$. Montrer de même que la suite définie par $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ converge vers $\mathrm{ch}(x)$