Feuille 4 : Équations différentielles linéaires du premier ordre
Plan affine et espace affine de dimension 3

Exercice 1. Résoudre, sur des intervalles que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y$ 2. $y' + 2y = 0$ 3. $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$ 4. $y' + \dfrac{y}{2x} = 0.$

Exercice 2. Résoudre sur l'intervalle $]0,\pi[$ l'équation différentielle $y' = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}y$ puis déterminer la solution y telle que $y(\pi/6) = 1$.

Exercice 3 (Calcul de primitives)**.** On donne ici des méthodes pour calculer des primitives (et donc résoudre des équations différentielles).

(A) La méthode « d'intégration par parties » est la suivante. Sur un intervalle I, soit donné un produit fg de fonctions, et supposons qu'on connaisse déjà une primitive F de f sur I. La formule $(Fg)' = F'g+Fg' = fg+Fg'$ donne : $\boxed{fg = (Fg)' - Fg'}$ donc *si on connaît une primitive H de Fg'* sur I, alors $Fg - H$ est une primitive de fg sur I. Illustrons ceci par les exemples suivants :

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\ln(x)$. Indication : prendre $f(x) = 1$ et $g(x) = \ln(x)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $xe^{\lambda x}$, puis de $x^2e^{\lambda x}$.

(B) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $P(x)$ un polynôme non nul de degré d. On peut montrer, en procédant par récurrence sur le degré d de P, que les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$ sont les fonctions $F(x) = c + Q(x)e^{\lambda x}$, où c est un réel arbitraire et Q un polynôme de degré d uniquement déterminé par la condition

$$P(x)e^{\lambda x} = F'(x) = \big(Q'(x) + \lambda Q(x)\big)e^{\lambda x}$$

i.e. $\boxed{Q' + \lambda Q = P.}$ Si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$, on cherche Q sous la forme $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_dx^d$, où les $b_i \in \mathbb{R}$ sont des coefficients inconnus que l'on détermine en écrivant que

$$Q'(x) + \lambda Q(x) = b_1 + \lambda b_0 + (2b_2 + \lambda b_1)x + \cdots + (db_d + \lambda b_{d-1})x^{d-1} + \lambda x^d = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d.$$

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + x^3)e^{\lambda x}$.

Exercice 4. Résoudre, sur des intervalles que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y+1$ 2. $y'-y = xe^x$ 3. $y'+y = 2e^x$ 4. $y'+y = \cos(x)+\sin(x)$ 5. $y'-2y = x^2$

6. $y' - y = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ 7. $y' + \dfrac{y}{1+x^2} = \dfrac{1-x-x^2}{1+x^2}$ 8. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$ 9. $y' + \dfrac{x}{x^2-1}y = \dfrac{1}{x^2-1}.$

Exercice 5. Soient g et h les fonctions définies sur $]1,+\infty[$ par : $g(x) = \ln(\ln(x))$ et $h(x) = \dfrac{-1}{\ln(x)}$.

1. Calculer les dérivées des fonctions g et h.
2. Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle linéaire : $y' - \Big(x + \dfrac{1}{x\ln(x)}\Big)y = \dfrac{\exp(x^2/2)}{x\ln(x)}$.

Exercice 6. 1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$ et calculer la dérivée de g sur $]2,+\infty[$.

2. Résoudre sur l'intervalle $]2,+\infty[$ l'équations différentielle linéaire : $y' = \dfrac{2}{x(x-2)}y + 2(x-2)$.

Exercice 7. 1. Calculer la dérivée de la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2. Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+x^2)y' + xy = 0$, puis de $(1+x^2)y' + xy = 2x$.

Exercice 8. 1. Soit $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Calculer la dérivée de la fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

2. Trouver les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + \tan(x)y = \tan(x)$.

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\sqrt{1+x^2}\, y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$,
2. $\sqrt{x^2-1}\, y' + y = 1$ sur $]1, +\infty[$,
3. $\sin(x)^3 y' = 2\cos(x) y$ sur $]0, \pi[$,
4. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
5. $\mathrm{ch}(x)y' - \mathrm{sh}(x)y = \mathrm{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Former une équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre, dont les solutions sont les fonctions $f(x) = \dfrac{C+x}{1+x^2}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. On cherche à résoudre l'équation différentielle (non linéaire) $y' = 1 + y^2$ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$.

1. En trouver une solution particulière.
2. Soit f une solution. Pour $x \in I$, on pose $g(x) = \mathrm{Arctan}(f(x))$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur I.

Exercice 12. Lors d'une compétition de plongeon d'une hauteur de 27m, les commentateurs ont dit que les plongeurs arrivaient dans l'eau avec une vitesse d'environ 90km/h. En prenant l'accération de la pesanteur g égale à $10\mathrm{m/s}^2$, déterminer la vitesse acquise lors d'une chute libre de 27m. Comparer avec la vitesse indiquée plus haut.

Exercice 13. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'on note (x, y) les coordonnées dans ce repère. On lance à partir de O un projectile, assimilé à un point matériel, avec un vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ non nul et formant avec $\overrightarrow{i}$ un angle $\theta \in]0, \pi/2[$. On note v_0 la norme euclidienne de $\overrightarrow{v_0}$, de sorte que $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos(\theta)\overrightarrow{i} + v_0 \sin(\theta)\overrightarrow{j}$. On suppose que le projectile n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur (i.e. on néglige les forces de frottement dans l'air).

1. Écrire les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du mobile à l'instant t.
2. Soit $t_0 > 0$ l'instant où le projectile retombe au sol, i.e. où $y(t_0) = 0$. On note $x_{\max} = x(t_0)$ la distance horizontale ainsi atteinte. Exprimer $x_{\max}$ en fonction de v_0 et θ.
3. En supposant v_0 fixé, déterminer la valeur de θ pour laquelle $x_{\max}$ est le plus grand possible.

Exercice 14. On munit le plan d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'on note (x, y) les coordonnées dans ce repère.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et soit $\mathcal{D}$ la droite affine d'équation $ax + by + c = 0$. Déterminer l'équation de la droite vectorielle associée D, un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D ainsi qu'un point $I \in \mathcal{D}$.
2. Soit $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ et soit A le point de coordonnées $(1, 4)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer l'équation de la droite affine $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

Exercice 15. On munit l'espace d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et l'on note (x, y, z) les coordonnées dans ce repère.

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit $\mathcal{P}$ le plan affine d'équation $ax + by + cz = d$. Déterminer l'équation du plan vectoriel P associé, une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de P, et un point $I \in \mathcal{P}$.
2. On considère les plans affines $\mathcal{P}$, d'équation $x + y + z = 1$ et $\mathcal{P}'$, d'équation $x + 2y + z = 1$. Déterminer l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et montrer que c'est une droite affine $\mathcal{D}$, dont on donnera un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ ainsi qu'un point $I \in \mathcal{D}$.