Feuille 6 : Polynômes

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Ceux marqués $(*)$ nécessitent un peu plus de réflexion. Dans cette feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si $Q^2 = XP^2$ alors $P = 0 = Q$.
2. On suppose que P est non constant et $P(P(X)) = P(X)$. Montrer que $\deg(P) = 1$ puis déterminer P.

Exercice 2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2 + 1) = P(X)$, 2. $P(2X + 1) = P(X)$, 3. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 3. 1. Soit $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ l'application définie par $\phi(P) = P - P'$, où P' désigne le polynome dérivé de P. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'unique polynôme P tel que $\phi(P) = X^n$.

2. Même question pour l'application $\psi(P) = P + (X - 1)P'$.

Exercice 4 (Division euclidienne)**.** Faire les divisions euclidiennes suivantes :

1. $X^3 - 1$ par $X - 1$ puis $X^4 + X^2 + 1$ par $X^2 + X + 1$ puis $X^6 - 1$ par $(X^2 - 1)(X^2 + X + 1)$.
2. $X^5 - 1$ par $X - 1$ puis $X^8 + X^6 + X^4 + X^2 + 1$ par $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ puis $X^{10} - 1$ par $X^2 - 1$ puis le quotient de la division précédente par $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
3. Soit ξ une racine primitive 6-ième (resp. 10-ième) de l'unité. Montrer que ξ est racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré 2 (resp. 4) que l'on déterminera.

Exercice 5 ($\mathbb{C}$ est algébriquement clos)**.** On admet le **Théorème :** Tout polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins un racine dans $\mathbb{C}$. En procédant par récurrence sur le degré, en déduire le :

Corollaire. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $d \geq 1$ et a son coefficient dominant (i.e. le coefficient de X^d). Alors P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$: $P = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_d)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont les racines de P dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicité.

Exercice 6 (Relations entre coefficients et racines)**.** Soit $P = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicité. En développant le produit $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$, montrer que :

1. $a_1 = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ et $a_n = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n$.
2. $(*)$ $a_2 = \displaystyle\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j$.
3. En particulier, si $n = 2$ exprimer P en fonction de la somme s et du produit p des racines.
4. $(**)$ Pouvez-vous deviner la formule exprimant le coefficient a_k de X^{n-k} en fonction des racines ?

Exercice 7 $(*)$**.** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$, $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que a est une racine de P d'ordre exactement k (i.e. $P = (X - a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$) si et seulement si $P(a) = 0 = \cdots = P^{(k-1)}(a)$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

Suggérons deux méthodes possibles : (i) montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que si $P = (X - a)^k R$ pour un certain polynôme R alors $P^{(k)} = k!\, R + (X - a)S$ pour un certain polynôme S. Ou bien : (ii) écrire P comme un polynôme en $X - a$, i.e. $P(X) = c_0 + c_1(X - a) + c_2(X - a)^2 + \cdots + c_n(X - a)^n = R(X - a)$, où $R(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i X^i$, et montrer par récurrence sur k que $P^{(k)}(X) = R^{(k)}(X - a)$.

Exercice 8. Soit n un entier ≥ 2.

1. En utilisant l'exercice 6, montrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0 et que leur produit vaut $(-1)^{n-1}$.

Soit ξ une racine n-ième de l'unité différente de 1. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k + 1)\xi^k$.

2. En calculant $(1 - \xi)S$, déterminer la valeur de S.

3. Retrouver le résultat précédent en écrivant que le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)w^k$ est la dérivée d'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ que l'on précisera, et en calculant $F' = \frac{P'}{Q} - \frac{PQ'}{Q^2}$ puis $F'(\xi)$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n+1$ possédant $n+1$ racines réelles distinctes.

1. Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement n racines réelles distinctes.
2. Montrer que les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P^2+1 sont toutes simples. Indication : utiliser l'exercice 8.

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $\leq n$. Soit w une racine primitive (n+1)-ième de l'unité, par exemple $w = e^{2i\pi/(n+1)}$.

1. Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} w^{lk} = \begin{cases} n+1 & \text{si } l \in (n+1)\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. En déduire la valeur de $P(1) + P(w) + \cdots + P(w^n)$.
3. Pour $k = 1, \ldots, n$, calculer de même $P(1) + w^{-k}P(w) + \cdots + w^{-nk}P(w^n)$.
4. On pose $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $|a_k| \leq M$.

Exercice 11. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par : $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$ pour tout $n \geq 2$.

1. Préciser P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité des polynômes P_n.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Exercice 12. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par $P_1(X) = X - 2$ et $P_n = P_{n-1}^2 - 2$ pour $n \geq 2$. Notons a_n, b_n et c_n les coefficients de 1, X et X^2 dans P_n.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_n = 2$, $b_n = -4^{n-1}$ et $c_n = 4^{n-2}\frac{4^{n-1}-1}{3}$.

Exercice 13. Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Vérifier que $X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X-3)^2$.
2. Déterminer les racines α, β dans $\mathbb{C}$ du polynôme $Q = X^2 - 3X - 3i$ et montrer que les racines de $X^2 - 3X + 3i$ sont $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$.
3. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ où $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux des racines, disons α et β, est égale à la troisième, disons γ.

Indication : utiliser l'exercice 6 pour déterminer γ, puis faire la division euclidienne de P par $X - \gamma$ pour trouver un polynôme Q de degré 2, et enfin déterminer les racines de Q.