Analyse et Algèbre pour les sciences, 1M001
Cours

Sylvie Guerre-Delabrière
Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie

Table des matières

Chapitre 1

$\mathbb{R}$, ordre, intervalles

1.1 Définitions et rappels

Définition 1.1.1. *Un entier naturel est un nombre positif ou nul permettant de dénombrer des objets comptant chacun pour un. Un nombre entier s'écrit dans le système décimal, avec une suite finie de chiffres de* 0 *à* 9*, sans signe et sans virgule. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté* $\mathbb{N}$.

Propriété 1.1.2. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *est muni de deux lois, l'addition, notée* $+$ *et la multiplication, notée* $\cdot$*, qui vérifient les propriétés élémentaires suivantes, pour tous entiers* m, n, p *:*

i) Pour l'addition :
- *Associativité :* $m + (n + p) = (m + n) + p$ *;*
- *Elément nul :* $n + 0 = 0 + n = n$ *;*
- *Commutativité :* $m + n = n + m$ *;*

ii) Pour la multiplication :
- *Associativité :* $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ *;*
- *Elément unité :* $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ *;*
- *Distributivité par rapport à l'addition :* $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ *;*
- *Commutativité :* $m \cdot n = n \cdot m$.

Proposition 1.1.3. *Division euclidienne dans* $\mathbb{N}$
Etant donné deux entiers naturels a *et* b *avec* $b \neq 0$*, il existe un couple unique d'entiers naturels* q *et* r *tels que*

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leq r < b$$

Démonstration. Les deux entiers a et b étant donnés avec $b \neq 0$, on définit le sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ par :

$$E = \{k \in \mathbb{N} \mid kb \leq a\}$$

L'ensemble E est non vide puisqu'il contient 0 et est borné par a. Donc il admet un plus grand élément q. Alors, on a $qb \leq a$ et $a < (q + 1)b$.
En posant $r = a - qb$, on obtient bien $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Montrons l'unicité du couple (p, q) par l'absurde : si (p, q) et (p', q') sont deux couples distincts vérifiant $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ et $a = bq' + r'$ avec $0 \leq r' < b$, alors en supposant par exemple $q > q'$, par soustraction, on obtient $b(q - q') = r' - r$.

Le nombre entier positif $b(q - q')$ est strictement plus grand que b alors que $r' - r$ est strictement plus petit que b. Ce n'est pas possible donc $q = q'$ et $r = r'$. $\square$

Définition 1.1.4. *Division*

i) On dit qu'un entier naturel n non nul divise un entier naturel m non nul s'il existe un entier naturel k tel que $m = kn$.

ii) On dit qu'un nombre entier naturel p est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

La division euclidienne permet de définir le PGCD de deux entiers naturels :

Définition 1.1.5. *PGCD*

i) Le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de deux entiers non nuls a et b est le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b.

ii) On dit que a et b sont premiers entre eux si PGCD $(a, b) = 1$ *c'est-à-dire s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.*

Définition 1.1.6. *Un entier relatif est un nombre entier muni d'un signe. L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.*

Propriété 1.1.7. *Les lois d'addition et de multiplication des entiers naturels se prolongent à $\mathbb{Z}$, avec les mêmes propriétés, plus une propriété supplémentaire : tout entier relatif p admet un opposé, $p + (-p) = (-p) + p = 0$.*

Théorème 1.1.8. *Théorème de Bezout.*
Les deux nombres entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs non nuls u et v tels que

$$au + bv = 1$$

La démonstration du théorème de Bezout est donnée en exercice (exercices 1.1 et 1.2).

Corollaire 1.1.9. *Théorème de Gauss.*
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif. Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

Démonstration. Si a et b sont premiers entre eux, par le théorème de Bezout, 1.1.8, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. En multipliant cette égalité par c, on trouve : $acu + bcv = c$. On sait que a divise bc donc a divise $acu + bcv$. Par suite a divise bien c. $\square$

1.2 Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1. *Un nombre x est rationnel s'il existe deux entiers relatifs p et q, avec $q \neq 0$, tels que $x = \dfrac{p}{q}$.*
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Définition 1.2.2. *La représentation d'un nombre rationnel $x = \dfrac{p}{q} \neq 0$, avec $q > 0$ est dite irréductible si*
- lorsque $p > 0$, $\text{PGCD}\ (p, q) = 1$
- lorsque $p < 0$, $\text{PGCD}\ (-p, q) = 1$.

Proposition 1.2.3. *La représentation irréductible d'un nombre rationnel non nul est unique.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut considérer le cas d'un nombre rationnel positif, le cas négatif se traitant de la même façon.
Supposons qu'on ait deux représentations irréductibles d'un nombre rationnel $x > 0$, soit $x = \dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2}$ où p_1, p_2, q_1, q_2 sont des entiers naturels non nuls.
Alors $p_1q_2 = p_2q_1$.

Puisque p_1 est premier avec q_1, le théorème de Gauss, 1.1.9, implique que p_1 divise p_2. De la même façon, p_2 divise p_1 et donc ils sont égaux. Par suite, on a aussi $q_1 = q_2$. On a donc bien l'unicité de la représentation irréductible de x. □

Remarque. Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, par exemple un nombre x tel que $x^2 = 2$. En effet, supposons au contraire que le nombre rationnel $x = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible, vérifie $x^2 = 2$.

Alors, en multipliant par q^2, on obtient $p^2 = 2q^2$. Cette deuxième équation implique que p^2 est pair et donc p également. Puisque p et q sont premiers entre eux, q est impair. Mais 4 divise p^2 donc 2 divise q^2 ce qui n'est pas possible. Donc x n'est pas rationnel.

Définition 1.2.4. *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est défini par la droite réelle : étant donné une origine, un sens et une unité de longueur, à tout point de la droite réelle, on associe un nombre réel x. La valeur x représente la distance du point à l'origine si $x > 0$ et son opposée si $x < 0$.*

Définition 1.2.5. *On appelle irrationnels les nombres réels qui ne sont pas rationnels. On note $\mathbb{I}$ l'ensemble des nombres irrationnels.*
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est la réunion de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{I}$, soit $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Théorème 1.2.6. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps commutatif admettant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux lois, l'addition, notée $+$ et la multiplication, notée $\cdot$ ou $\times$, qui lui donnent une structure de corps, c'est-à-dire qui vérifie les axiomes :

$\star$ $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif :

- Associativité : pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$
- Existence d'un élément nul, noté 0 : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$
- Existence d'un opposé : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x + (-x) = (-x) + x = 0$
- Commutativité : pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $x + y = x + y$

$\star$ $(\mathbb{R}, \cdot)$ vérifie :

- Associativité : pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- Existence d'un élément unité, noté 1 : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- Existence d'un inverse pour les réels non nuls :
  pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$, $x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot x = 1$
- Distributivité par rapport à l'addition : pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- Commutativité : pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $x \cdot y = x \cdot y$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ car les opérations $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{R}$ restreintes à $\mathbb{Q}$ sont celles de $\mathbb{Q}$. En particulier, l'addition et la multiplication de nombres rationnels sont des nombres rationnels.

1.3 L'ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 1.3.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné. L'ordre sur $\mathbb{R}$ est compatible avec la structure de corps.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'un ordre total, notée $\leq$, qui vérifie les axiomes :
- Reflexivité : pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x \leq x$
- Antisymétrie : pour tous x, y dans $\mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$
- Transitivité : pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$

L'ordre est total veut dire que :
- si x et y sont deux réels, alors ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$.

L'ordre est comptatible avec la structure de corps veut dire que :
- pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $x \leq y \iff x + z \leq y + z$
- pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$, $z > 0$, $x \leq y \iff x \cdot z \leq y \cdot z$

Cette relation d'ordre total prolonge celle de $\mathbb{Q}$.

Remarque. Les axiomes de la relation d'ordre impliquent en particulier que, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < x \leq y$, alors $-y \leq -x < 0$ et $0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$.

Notations 1.3.2. *Soient x et y deux nombres réels.*

i) *Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on note $x < y$*

ii) *La propriété $x \leq y$ se note également $y \geq x$*

iii) *Si $x \geq y$ et $x \neq y$, on note $x > y$*

Définition 1.3.3. *La valeur absolue d'un nombre réel x est $|x| = \max(x, -x)$.*

Proposition 1.3.4. *Les propriétés de la valeur absolue sont :*

i) $|x| \geq 0$

ii) $|x| = 0 \iff x = 0$

iii) $|xy| = |x||y|$

iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Inégalité triangulaire)*

Démonstration. Les trois premiers alinéas sont évidents. Montrons le *iv)*, en distinguant deux cas :

-Si x et y sont de même signe, alors $|x+y| = x+y$ s'ils sont positifs ou $|x+y| = -x-y$ s'ils sont négatifs. De même, $|x| + |y| = x + y$ s'ils sont positifs ou $|x| + |y| = -x - y$ s'ils sont négatifs. D'où l'égalité $|x + y| = |x| + |y|$.

–Si x et y sont de signe contraire, par exemple $x \leq 0$ et $y \geq 0$. Alors $|x + y| = x + y$ si $y \geq -x$ et $|x+y| = -x - y$ si $y \leq -x$. D'autre part, $|x| + |y| = -x + y$. Or comme $x \leq 0$, $x + y \leq -x + y$ et comme $y \geq 0$, alors $-x - y \leq -x + y$.
Dans les deux cas, on a bien $|x + y| \leq |x| + |y|$.

On peut remarquer que l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si x et y sont de même signe. □

Définition 1.3.5. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :*

i) Le nombre réel M est un majorant de A si tout élément de A est inférieur ou égal à M

ii) Le nombre réel m est un minorant de A si tout élément de A est supérieur ou égal à m

iii) L'ensemble A est majoré (ou borné supérieurement) s'il possède au moins un majorant

iv) L'ensemble A est minoré (ou borné inférieurement) s'il possède au moins un minorant

v) L'ensemble A est borné s'il est majoré et minoré.

Définition 1.3.6. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) Un réel a est le plus grand élément (ou maximum) de A si a appartient à A et est un majorant de A. On note $a = \max A$.

ii) Un réel b est le plus petit élément (ou minimum) de A si b appartient à A et est un minorant de A. On note $b = \min A$.

Toute partie bornée de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit et un plus grand élément. En revanche, une partie bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{Q}$ n'a pas forcément de plus petit ou plus grand élément. Par exemple, la partie $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ n'a pas de plus grand élément car le seul candidat possible est 0 et $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. En revanche, on a :

Proposition 1.3.7. *Si une partie A admet un plus grand élément (respectivement plus petit), alors il est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une partie A admette deux plus grands éléments a_1 et a_2. Alors tout élément $a \in A$ est inférieur ou égal à a_1. En particulier, puisque $a_2 \in A$, $a_2 \leq a_1$. De même, tout élément $a \in A$ est inférieur ou égal à a_2. En particulier, puisque $a_1 \in A$, $a_1 \leq a_2$. D'où $a_1 = a_2$. □

A défaut d'un plus petit ou d'un plus grand élément, on a une autre définition, dont l'intérêt est décrit dans le théorème 1.3.10 qui suit et qui est l'une des principales qualités de $\mathbb{R}$:

Définition 1.3.8. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) Un nombre réel a est la borne supérieure de A si a est le plus petit majorant de A. On note $a = \sup A$.

ii) Un nombre réel b est la borne inférieure de A si b est le plus grand minorant de A. On note $b = \inf A$.

La proposition 1.3.7 implique que si la borne supérieure (respectivement inférieure) d'un ensemble existe, alors elle est unique.

Proposition 1.3.9. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) Un nombre réel a est la borne supérieure de A si et seulement si pour tout $x \in A$, $x \leq a$ et pour tout $a' < a$, il existe $x \in A$ tel que $a' < x$.

ii) Un nombre réel b est la borne inférieure de A si et seulement si pour tout $x \in A$, $x \geq b$ et pour tout $b' > b$, il existe $x \in A$ tel que $b' > x$.

Démonstration. Les deux assertions se démontrent de la même façon, montrons *i)* : dire que $a = \sup\ A$ c'est dire que :
- a est un majorant de A, ce qui s'exprime par $x \leq a$ pour tout $x \in A$
- a est le plus petit majorant, ce qui veut dire que si on prend un nombre a' strictement plus petit que a, ce n'est plus un majorant de A, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $a' < x$. □

Théorème 1.3.10. *(admis) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Proposition 1.3.11. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

i) Si $a = \max A$, alors $a = \sup A$. La réciproque est fausse

ii) Si $b = \min A$, alors $b = \inf A$. La réciproque est fausse.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la définition du maximum (ou du minimum) d'une partie de $\mathbb{R}$ est plus contraignante que celle de la borne supérieure (ou inférieure) car le maximun (ou le minimum) doit appartenir à la partie alors que cela n'est pas nécessaire pour la borne supérieure (ou inférieure). □

Montrons pas deux exemples, que les réciproques sont fausses, c'est-à-dire qu'il existe des ensembles ayant des bornes supérieures ou inférieures mais qui n'ont pas de maximum ou de minimum :

Exemple 1.3.12.

i) *L'ensemble* $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ *admet 0 comme borne inférieure et 1 comme borne supérieure, qui est aussi son maximum. L'ensemble* A *n'admet pas de minimum.*

ii) *L'ensemble* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ *admet* $\sqrt{2}$ *comme borne supérieure et* $-\sqrt{2}$ *comme borne inférieure. L'ensemble* B *n'admet ni maximum ni minimum.*

On peut remarquer que le deuxième exemple montre que l'ensemble des rationnels ne possède pas la propriété dite de la borne supérieure, c'est-à-dire que $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas le théorème 1.3.10. En effet le sous ensemble $B' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ n'admet pas de borne supérieure ni de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.3.13. *Soit* A *et* B *deux parties non vides et bornées de* $\mathbb{R}$.
Si $A \subset B$, *alors* $\sup A \leq \sup B$ *et* $\inf A \geq \inf B$.

Démonstration. Si $A \subset B$, alors tout majorant de B est un majorant de A. En particulier la borne supérieure de B est un majorant de A. Donc la borne supérieure de A est inférieure à la borne supérieure de B.
De même, alors tout minorant de B est un minorant de A. En particulier la borne inférieure de B est un minorant de A. Donc la borne supérieure de A est supérieure à la borne inférieure de B. □

Une conséquence importante du théorème de la borne supérieure est la propriété d'Archimède qui suit :

Théorème 1.3.14. *Propriété d'Archimède.*
L'ensemble $\mathbb{R}$ *des nombres réels est archimédien, c'est-à-dire que pour tout* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $b \in \mathbb{R}_+^*$, *il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $na > b$.

Démonstration. Si $na \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par b, elle admet donc une borne supérieure α. On a alors $(n+1)a \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui entraine $na \leq \alpha - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre $\alpha - a$ est donc un majorant de A strictement inférieur à α, ce qui est impossible. Par suite, il existe bien un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $na > b$. □

1.4 Intervalles

Définition 1.4.1. *Un intervalle est un sous-ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *tel que si* x *et* y *sont dans* I, *alors tout nombre* z *compris entre* x *et* y *est encore dans* I.

Exemple 1.4.2. *Intervalles bornés*

i) *Un intervalle borné et ouvert est défini par* $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, *où* a *et* b *sont deux nombres réels donnés tels que* $a < b$. *On note cet intervalle par* $]a, b[$.

ii) *Un intervalle borné et fermé est défini par* $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, *où* a *et* b *sont deux nombres réels donnés tels que* $a < b$. *On note cet intervalle par* $[a, b]$.

iii) *Un intervalle borné et semi-ouvert est défini par* $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *(ou bien* $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$*), où* a *et* b *sont deux nombres réels donnés tels que* $a < b$. *On note cet intervalle par* $[a, b[$ *(ou bien* $]a, b]$*).*

Les définitions du paragraphe **1.2** impliquent immédiatement la proposition suivante :

Proposition 1.4.3. *Soient a et b deux nombres réels donnés tels que $a < b$.*

i) Cas d'un intervalle ouvert :
$a = \inf]a, b[$ *et* $b = \sup]a, b[$ *et l'intervalle* $]a, b[$ *n'a ni maximum ni minimum.*

ii) Cas d'un intervalle fermé :
$a = \inf[a, b] = \min[a, b]$ *et* $b = \sup[a, b] = \max[a, b]$.

iii) Cas d'un intervalle semi-ouvert à droite :
$a = \inf[a, b[= \min[a, b[$ *et* $b = \sup]a, b[$ *et l'intervalle* $[a, b[$ *n'a pas de maximum.*

iv) Cas d'un intervalle semi-ouvert à gauche :
$a = \inf]a, b]$ *et* $b = \sup]a, b] = \max]a, b]$ *et l'intervalle* $]a, b]$ *n'a pas de minimum.*

Exemple 1.4.4. *Intervalles non bornés*

i) Un intervalle non borné est ouvert s'il est de la forme , $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ *ou* $\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, *où a et b sont deux nombres réels donnés. On dénote ces intervalles par* $]a, +\infty[$ *et* $] - \infty, b[$.

ii) Un intervalle non borné est fermé s'il est de la forme , $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ *ou* $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, *où a et b sont deux nombres réels donnés. On énote ces intervalles par* $[a, +\infty[$ *et* $] - \infty, b]$.

Comme précédemment, on a :

Proposition 1.4.5. *Soient a et b deux nombres réels donnés.*

i) $a = \inf]a, +\infty[$ *et l'intervalle* $]a, +\infty[$ *n'a pas de minimum.*

ii) $b = \sup] - \infty, b[$ *et l'intervalle* $] - \infty, b[$ *n'a pas de maximum.*

iii) $a = \inf[a, +\infty[= \min[a, +\infty[$.

iv) $b = \sup] - \infty, b] = \max] - \infty, b]$

Remarque. L'ensemble $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé.

Notations 1.4.6. *Si A est un ensemble de nombres, on note :*

$$A_+ = \{x \in A \mid x \geq 0\}$$

$$A_- = \{x \in A \mid x \leq 0\}$$

$$A^* = \{x \in A \mid x \neq 0\}$$

$$A_+^* = \{x \in A \mid x > 0\}$$

$$A_-^* = \{x \in A \mid x < 0\}$$

Chapitre 2

Limites

2.1 Voisinages

La notion de voisinage sert à définir les limites. Il y a deux cas de limites très différents, celui où la variable parcourt l'ensemble $\mathbb{N}$, il s'agit alors de limites de suites et celui où la variable parcourt un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, il s'agit alors de limites de fonctions.
On a donc deux notions de voisinages, l'une dans dans $\mathbb{N}$ et l'autre dans $\mathbb{R}$:

$\star$ **Voisinages dans** $\mathbb{N}$:

L'ensemble $\mathbb{N}$ est discret c'est-à-dire que tous les points de $\mathbb{N}$ sont isolés les uns des autres. Il n'y a dans ce cas qu'un seul type de voisinages, ce sont les voisinages de $+\infty$:

Définition 2.1.1. *Un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble contenant tous les entiers supérieurs à un entier N donné, c'est-à dire un ensemble contenant un ensemble de la forme $\{n \in \mathbb{N} \mid n > N\}$.*

Dire qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ est dans un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$ revient donc à dire qu'il existe un entier $N > 0$ tel que $n > N$.

$\star$ **Voisinages dans** $\mathbb{R}$:

Définition 2.1.2. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ où η est un nombre strictement positif. On note $V(x_0)$ ou $W(x_0)$ un voisinage de x_0.*

Définition 2.1.3. *Un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ (respectivement $-\infty$) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle $]A, +\infty[$ où A est un nombre réel positif (respectivement $]-\infty, B[$ où B est un nombre réel négatif). On note $V(+\infty)$ ou $V(-\infty)$ un voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.*

Remarque. Deux voisinages d'un même point x_0 dans $\mathbb{R}$, ou de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{N}$, ou de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$ sont toujours d'intersection non vide.

2.2 Limite d'une suite

Définition 2.2.1. *Une suite réelle est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*, qui à tout entier* n *associe un nombre réel* u_n*. Une suite est donc définie par l'ensemble ordonné de ses valeurs que l'on note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Voila une représentation de la définition d'une suite :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

Dans certains cas, voir l'exemple 2.2.6, les termes u_n ne sont pas définis pour certaines valeurs de n. Dans la pratique, cela se produit pour $n = 0$ ou $n = 0$ et $n = 1$. On definit alors la suite par $(u_n)_{n>0}$ ou $(u_n)_{n>1}$. Par exemple, c'est le cas de la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n > 0$ ou encore $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour $n > 1$.
Les propriétés sont données dans le cas général où les termes de la suite sont définis pour tout entier n et elles s'adaptent sans problème aux autres cas.

L'étude d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à déterminer sa **nature**, c'est-à-dire le comportement de ses termes u_n quand n tend vers $+\infty$.

Définition 2.2.2. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l \in \mathbb{R}$ *quand* n *tend vers* $+\infty$ *si quelque soit le voisinage* $V(l)$ *dans* $\mathbb{R}$*, il existe un entier* N *tel que si* $n > N$*, alors* $u_n \in V(l)$*.*
Dans ce cas, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, que* l *est sa limite et on note* $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$*.*

Notations 2.2.3. *La propriété* n *tend vers* $+\infty$ *se note* $n \to +\infty$*.*

Proposition 2.2.4. *Une suite convergente admet au plus une limite.*

Démonstration. Supposons qu'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette deux limites distinctes l_1 et l_2. On se donne $\varepsilon < \dfrac{|l_2 - l_1|}{2}$ et on considére les voisinages de l_1 et l_2 dans $\mathbb{R}$: $]l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon[$ et $]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[$. Alors il existe N_1 et N_2 tels que :
si $n > N_1$, alors $u_n \in]l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon[$ et si $n > N_2$, alors $u_n \in]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[$.
On en déduit que si $n > \max\{N_1, N_2\}$, alors on a à la fois $u_n \in]l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon[$ et $u_n \in]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[$.
Ceci n'est pas possible puisque ces intervalles sont disjoints. On obtient donc une contradiction et la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut admettre qu'une seule limite. □

Définition 2.2.5. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *(ou vers* $-\infty$*) si quelque soit le voisinage* $V(+\infty) \subset \mathbb{R}$ *(ou* $V(-\infty) \subset \mathbb{R}$*), il existe un entier* N *tel que si* $n > N$*, alors* $u_n \in V(+\infty)$ *(ou* $V(-\infty)$*).*
Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *(ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*).*

Exemple 2.2.6.

i) Soit $\alpha > 0$ *donné. La suite* $(u_n)_{n>0}$*, définie par* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *pour tout* $n > 0$ *converge vers 0 quand* n *tend vers* $+\infty$*.*

ii) *La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne converge pas quand n tend vers $+\infty$.*

iii) *La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $w_n = e^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. *i)* Soit $\varepsilon > 0$. On considère le voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, $]-\varepsilon, +\varepsilon[$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N^\alpha > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Alors si $n > N$, $u_n \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. La suite $(u_n)_{n>0}$ converge bien vers 0 quand $n \to +\infty$.

ii) Les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prennent alternativement la valeur $+1$ et la valeur -1. Soit un intervalle ouvert V de longueur plus petite que 1, alors quelque soit l'entier N, il existe $n_1 \geq N$ et $n_2 \geq N$ tel que $u_{n_1} = 1$ et $u_{n_2} = -1$ et donc u_{n_1} et u_{n_2} ne peuvent pas se trouver tous les deux dans V. Ceci contredit l'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) N étant donné, si $n > \ln N$, alors $w_n > N$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. □

Définition 2.2.7. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe deux nombres réels m et M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 2.2.8. *Toute suite convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$ est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. On se donne le voisinage $]l-1, l+1[$ de l dans $\mathbb{R}$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$, $u_n \in]l-1, l+1[$. Posons $m = \inf\{u_0, u_1, ..., u_N, l-1\}$ et $M = \sup\{u_0, u_1, ..., u_N, l+1\}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$. Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée. □

Application 2.2.9. *Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$, $a = \sup\ A$ et $b = \inf\ A$. Il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que d'une part $a_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et d'autre part, $b_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.*

On applique la caractérisation des bornes supérieure et inférieure de la proposition 1.3.9 : si $a = \sup\ A$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $a - \dfrac{1}{n} < a_n \leq a$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien la propriété voulue. On procède de la même façon pour la borne inférieure.

2.3 Limite d'une fonction

Définition 2.3.1. *Une fonction réelle f est une application d'un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout réel $x \in I$ associe un nombre réel $f(x)$. En pratique, l'ensemble I est un intervalle, un intervalle privé d'un point ou encore une réunion d'intervalles.*

Voila une représentation de la définition d'une fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 2.3.2. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à I si tout voisinage de x_0 a une intersection non vide avec I.*

Un point adhérent à un intervalle n'est pas forcément dans cet intervalle. Par exemple, a est adhérent à l'intervalle $]a, b]$ mais n'appartient pas à cet intervalle. Par contre, a est adhérent à l'intervalle $[a, b]$ et appartient à cet intervalle.

Définition 2.3.3. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un point intérieur à I s'il existe un voisinage de x_0 contenu dans I.*

Un point intérieur à un sous-ensemble I est évidemment un point adhérent à I. Par exemple, le point 0 est intérieur à l'intervalle $]-1, +1[$.

Définition 2.3.4. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à I. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0 si quelque soit le voisinage $V(l) \subset \mathbb{R}$, il existe un voisinage $W(x_0) \subset \mathbb{R}$ de x_0, tel que si $x \in W(x_0) \cap I$, alors $f(x) \in V(l)$.*
Dans ce cas, on dit que l est la limite de $f(x)$ lorsque $x \to x_0$ et on note $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Notations 2.3.5. *La propriété x tend vers x_0 se note $x \to x_0$.*

Proposition 2.3.6. *Si une fonction admet une limite quand $x \to x_0$, celle-ci est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une fonction f admette deux limites distinctes l_1 et l_2 quand $x \to x_0$. On se donne $\varepsilon < \dfrac{|l_2 - l_1|}{2}$ et on considére les voisinages de l_1 et l_2 dans $\mathbb{R}$: $]l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon[$ et $]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[$. Alors il existe $W_1(x_0)$ et $W_2(x_0)$ tels que : si $x \in W_1(x_0)$, alors $f(x) \in]l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon[$ et si $x \in W_2(x_0)$, alors $f(x) \in]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[$. On en déduit que si $x \in W_1(x_0) \cap W_2(x_0)$, alors on a à la fois $f(x) \in]l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon[$ et $f(x) \in]l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon[$.
Ceci n'est pas possible puisque ces intervalles sont disjoints. On obtient donc une contradiction et la fonction f ne peut admettre qu'une seule limite quand x tend vers x_0. □

Définition 2.3.7. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à I. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 si quelque soit le voisinage $V(+\infty) \subset \mathbb{R}$ (ou $V(-\infty) \subset \mathbb{R}$), il existe un voisinage $W(x_0) \subset \mathbb{R}$ de x_0, tel que si $x \in W(x_0) \cap I$, alors $f(x) \in V(+\infty)$ (ou $V(-\infty)$)).*
Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Les deux définitions 2.3.4 et 2.3.7 ont des analogues dans le cas où le sous-ensemble I est non borné et où x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: il suffit de remplacer le voisinage $W(x_0) \subset \mathbb{R}$ par un voisinage $W(+\infty) \subset \mathbb{R}$ ou $W(-\infty) \subset \mathbb{R}$.

Remarque. Dans tous les cas où une fonction a une limite, celle-ci est unique. La démonstration de la proposition 2.3.6 qui concerne le cas où $x \to x_0$ et la limite l est dans $\mathbb{R}$, s'adapte sans difficulté aux autres cas.

Exemple 2.3.8.

i) *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 + 1$ converge vers 1 quand x tend vers 0.*

ii) *La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = 3x + 2$ converge vers 2 quand x tend vers 0.*

iii) *La fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.*

iv) *La fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ si $x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ et $\varphi(x) = 1$ si $x \in [-1,1] \cap \mathbb{I}$ ne converge pas quand x tend vers 0.*

En effet, en appliquant les définitions 2.3.4 et 2.3.7 , on obtient :

i) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Alors si $x \in]-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon}[$, alors $f(x) - 1 \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. La fonction f converge bien vers 1 quand $x \to 0$.

ii) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Alors si $x \in]-\dfrac{\varepsilon}{3}, +\dfrac{\varepsilon}{3}[$, alors $g(x) - 2 \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. La fonction g converge bien vers 2 quand $x \to 0$.

iii) Soit $A > 0$. Alors si $0 < x < \dfrac{1}{A}$, $h(x) > A$. La fonction h tend bien vers $+\infty$ quand $x \to 0$.

iv) La fonction φ oscille entre deux valeurs, 0 et 1. Si V est un intervalle ouvert de longueur inférieure à $\dfrac{1}{2}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1 < \varepsilon$ et $x_2 < \varepsilon$ tels que $\varphi(x_1) = 0$ et $\varphi(x_2) = 0$ et donc $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ ne peuvent pas se trouver tous les deux dans V. Ceci contredit l'existence d'une limite pour φ quand $x \to 0$.

Extension 2.3.9. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à I. La limite à droite (respectivement à gauche) $l \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ lorsque $x \to x_0$ est définie par : quelque soit le voisinage $V(l)$, il existe un voisinage $W(x_0)$ de x_0, tel que si $x \in W(x_0) \cap I$ et $x > x_0$ (respectivement $x < x_0$), alors $f(x) \in V(l)$. Dans ce cas, on note $l = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (respectivement $l = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$).*

Si les limites à droite et à gauche existent et sont les mêmes lorsque $x \to x_0$, alors la limite existe et leur est égale. Cependant, au cas où x_0 est dans le domaine de définition de f, cette limite peut être égale ou non à la valeur $f(x_0)$.
Par exemple, la fonction qui vaut 0 sur $\mathbb{R}^*$ et 1 en 0 admet une limite à droite et une limite à gauche quand $x \to 0$ qui valent toutes les deux 0 mais la fonction prend la valeur 1 en 0.
De même, la fonction qui vaut 0 sur $\mathbb{R}_-^*$ et 1 sur $\mathbb{R}_+$ admet une limite à droite qui vaut 1 et une limite à gauche qui vaut 0 quand $x \to 0$. Cette fonction n'a pas de limite quand $x \to 0$.

2.4 Propriété des limites

Les propriétés présentées dans ce paragraphe sont énoncées à la fois dans le cadre des limites de suites et dans le cadre des limites de fonctions. Les démonstrations sont données dans le cadre des suites et elles s'adaptent sans difficulté aux fonctions.

Le premier résultat s'exprime en disant que le passage aux limites conserve les inégalités larges :

Théorème 2.4.1. *Limites et inégalités*

i) Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et si les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent respectivement vers* l *et* l'*, alors* $l \leq l'$*.*

ii) Si deux fonctions f *et* g *définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *vérifient pour tout* $x \in I$ *l'inégalité* $f(x) \leq g(x)$ *et si les fonctions* f *et* g *convergent respectivement vers* l *et* l' *quand* $x \to x_0$ *(ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$*), alors* $l \leq l'$*.*

Démonstration. Montrons *i)* en procédant par l'absurde : sous l'hypothèse du théorème, supposons que $l > l'$.
On se donne $0 < \varepsilon < \dfrac{l-l'}{2}$ et on considére les voisinages de l et l' dans $\mathbb{R}$: $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et $]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$. Alors il existe N_1 et N_2 tels que :
si $n > N_1$, alors $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et si $n > N_2$, alors $v_n \in]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$.
On en déduit que si $n > \max\{N_1, N_2\}$, alors $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et $v_n \in]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$.
Ceci n'est pas possible puisque étant donné que ces intervalles sont disjoints, ceci impliquerait que $u_n > v_n$ pour $n > \max\{N_1, N_2\}$. On obtient donc une contradiction et on a donc bien $l \leq l'$. □

La démonstration montre également que si les inégalités entre les suites ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang, c'est-à-dire pour les entiers $n \geq N_0$ pour un certain N_0 donné, la conclusion du théorème reste vraie.

Le résultat est encore vrai pour les limites à droite ou à gauche.

Attention, le passage à la limite ne respecte pas les inégalités strictes ! Par exemple, les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$, définies par $u_n = \dfrac{1}{2n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout $n > 0$. Par contre ces suites convergent toutes les deux vers 0 quand $n \to +\infty$.

Théorème 2.4.2. *Théorème des gendarmes.*

i) Si trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient* $u_n \leq v_n \leq w_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et si les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendent vers une même limite finie* l*, alors la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend aussi vers* l*.*

ii) Si trois fonctions f*,* g *et* h*, définies sur un intervalle* I *vérifient pour tout* $x \in I$ *les inégalités* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *et si les fonctions* f *et* h *tendent vers une même limite finie* l *quand* x *tend vers* x_0 *(ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$*), alors* g *tend vers la même limite* l*.*

Démonstration. Montrons *i)* : sous les hypothèses du théorème, on se donne $\varepsilon > 0$ et on considère le voisinages de l : $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Alors il existe N_1 et N_2 tels que :
si $n > N_1$, alors $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et si $n > N_2$, alors $w_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.
On en déduit que si $n > \max\{N_1, N_2\}$, alors $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et $w_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.
Puisque $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ceci entraine que $v_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ pour $n > \max\{N_1, N_2\}$. On obtient bien la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l.

□

Le théorème des gendarmes permet de comparer une suite ou une fonction donnée à des suites ou des fonctions plus simples dont on connait la nature c'est-à-dire le comportement quand $n \to +\infty$ ou $x \to x_0$. Il faut donc avoir un stock de suites et de fonctions dont on connait la nature.

Exemple 2.4.3. *La suite $(v_n)_{n>0}$, définie par $v_n = \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

En effet, on sait que pour tout $x \in [0,1]$, $\sin x \leq x$.
Pour $n > 1$, on a donc $0 \leq v_n = \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n} \leq v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
On peut donc appliquer le théorème des gendarmes avec les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(w_n)_{n>0}$ telles que $u_n = 0$ et $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n > 0$ et on en déduit que la suite $(v_n)_{n>0}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Extension 2.4.4. *Il existe des résultats analogues pour les limites infinies. Par exemple dans le cadre de deux fonctions f et g, définies sur I : si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*

Le dernier résultat de ce paragraphe caractérise les limites de fonctions à l'aide de suites convergentes. Il est énoncé dans le cadre de limites finies de fonctions, lorsque la variable tend vers un nombre réel. Il admet des analogues dans des limites infinies et lorsque la variable tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 2.4.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à I.*
La fonction f converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand $x \to x_0$ si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I, convergente vers x_0 quand $n \to +\infty$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand $n \to +\infty$.

Démonstration. Soit f une fonction qui converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand $x \to x_0$. On considère un voisinage de l, $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$, alors il existe un voisinage de x_0 de la forme $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ avec $\eta > 0$ tel que si $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$, alors $f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I, convergente vers x_0 quand $n \to +\infty$. Puisque la suite $(x_n - x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$, $|x_n - x_0| \leq \eta$. Et donc, pour $n > N$, par l'hypothèse sur f, $f(x_n) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Ceci montre que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand $n \to +\infty$.

Réciproquement procédons par l'absurde : supposons que pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I, convergente vers x_0 quand $n \to +\infty$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand $n \to +\infty$. Or, si la fonction f ne converge pas vers l quand $x \to x_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. On peut prendre comme valeurs de $\eta > 0$, les valeurs de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
A chacune de ces valeurs est associé un $x_n \in]x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}[$ tel que $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Ceci contredit l'hypothèse sur la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc la fonction f converge bien vers l quand $x \to x_0$. □

Le dernier résultat de ce paragraphe est spécifique aux suites numériques :

Définition 2.4.6. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{p(n)}$.*

Théorème 2.4.7. *(admis) Théorème de Bolzano-Weierstrass.*
De toute suite numérique bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

2.5 Opérations sur les limites

Définition 2.5.1. *Opérations sur les suites*

i) La somme de deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite numérique $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Le produit d'une suite numérique par une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ est la suite numérique $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) Le produit de deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite numérique $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iv) Le quotient d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est la suite numérique $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.5.2. *Opérations sur les fonctions*

i) La somme de deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ est la fonction $f + g$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in I$.

ii) Le produit d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ par une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ est la fonction λf définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in I$

iii) Le produit de deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ est la fonction fg définie par $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \in I$

iv) Le quotient de la fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ par la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ est la fonction $\dfrac{f}{g}$ définie par $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in I$.

Théorème 2.5.3. *Opérations sur les limites*
Lorsque les limites existent dans $\mathbb{R}$:

i) La limite d'une somme de suites ou de fonctions existe et est égale à la somme des limites.

ii) La limite du produit d'une suite ou d'une fonction par une constante existe et est égale au produit de la limite par cette constante.

iii) La limite d'un produit de suites ou de fonctions existe et est égale au produit des limites.

iv) La limite d'un quotient de suites ou de fonctions (dont les dénominateurs sont non nuls) existe et est égale au quotient des limites.

Démonstration. On montre ce théorème dans le cas des suites, le cas des fonctions se traite de façon analogue.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques qui convergent respectivement vers l et l'.

i) Soit $\varepsilon > 0$ donné.
Alors il existe N tel que si $n > N$, $|u_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe N' tel que si $n > N'$, $|v_n - l'| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si $n > \max\{N, N'\}$, alors on peut écrire, en utilisant l'inégalité triangulaire 1.3.4 :

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et admet pour limite $l + l'$.

ii) Soit $\varepsilon > 0$ donné et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut supposer que $\lambda \neq 0$, sinon, il n'y a rien à démontrer.
Alors il existe N tel que si $n > N$, $|u_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$. D'où, si $n > N$, on a $|\lambda u_n - \lambda l| \leq \varepsilon$, ce qui montre bien que la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite λl.

iii) Les deux suites étant convergentes, elles sont bornées par la proposition 2.2.8. Soit $M > 0$ une borne de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $M' > 0$ une borne de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
Alors il existe N tel que si $n > N$, $|u_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{M'}$ et il existe N' tel que si $n > N'$, $|v_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$.
Si $n > \max\{N, N'\}$, alors on peut écrire,

$$|u_n v_n - ll'| = |(u_n - l)v_n + (v_n - l')l| \leq M'|u_n - l| + M|v_n - l'| \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ll'.

iv) Pour simplifier, supposons que $l' > 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$convergeant vers l', à partir d'un certain rang n_0, $v_n \geq \dfrac{l'}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
Alors il existe N tel que si $n > N$, $|u_n - l| \leq \dfrac{l'^2}{2}\dfrac{\varepsilon}{M'}$ et il existe N' tel que si $n > N'$, $|v_n - l| \leq \dfrac{l'^2}{2}\dfrac{\varepsilon}{M}$.
Si $n > \max\{N, N', n_0\}$, alors on peut écrire,

$$|\frac{u_n}{v_n} - \frac{l'}{l}| = |\frac{u_n l' - v_n l}{v_n l'}| \leq \frac{2}{l'^2}|u_n l' - v_n l| \leq \frac{2}{l'^2}|(u_n - l)l' - (v_n - l')l|$$

$$\leq \frac{2}{l'^2}\left(M'|u_n - l| + M|v_n - l'|\right) \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $\dfrac{l}{l'}$. □

Dans le cas des fonctions, ces résultats restent vrais pour les limites à droite, respectivement à gauche.

Remarque. Il existe des résultats pour les somme, produit et quotient de limites infinies ou nulles dans le cas des quotients mais ces opérations peuvent aboutir à des formes indéterminées, c'est-à-dire : $\infty \times 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, $1^{-\infty}$, ∞^0.

Il existe des techniques pour lever les indéderminations, dont nous allons voir quelques exemples. Pour étudier les indéterminations 0^0, 1^∞, $1^{-\infty}$, ∞^0, la méthode générale est d'écrire, pour $a > 0$, $a^b = e^{b \ln a}$ qui ramène à l'étude de la forme indéterminée $b \ln a$. Il faut introduire des notations :

Notations 2.5.4. *Notations de Landau*
Au voisinage d'un point x_0, on introduit les définitions et notations suivantes :

i) *Une fonction f est dominée par une fonction g au voisinage de x_0 s'il existe une constante M telle que au voisinage du point x_0, on ait*

$$f(x) \leq M g(x)$$

On note cette propriété par $f(x) = O_{x \to x_0}(g(x))$,

ii) *Les deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel on ait*

$$(1-\varepsilon) g(x)) \leq f(x) \leq (1+\varepsilon) g(x)$$

Si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie dans un voisinage de x_0, cette propriété veut dire que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note cette propriété $f(x) \sim_{x \to x_0} g(x)$.

iii) *Une fonction f est négligeable par rapport à une fonction g au voisinage de x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel on ait*

$$\varepsilon g(x)) \leq f(x) \leq \varepsilon g(x)$$

Si la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie dans un voisinage de x_0, cette propriété veut dire que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note cette propriété $f(x) = o_{x \to x_0}(g(x))$ ou encore $f(x) = g(x)\varepsilon(g(x))$ où la fonction ε vérifie $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(g(x)) = 0$.

Exemple 2.5.5.

i) $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$

i) C'est une forme indéterminée du type 1^∞.
On écrit $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ et on est ramené à une forme indéterminée du type $\infty \times 0$. Pour la résoudre, on utilise les développements limités et les équivalents que l'on verra au chapitre 7 : $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$. On en déduit que $e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ admet pour limite e quand $n \to +\infty$.

ii) C'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
On écrit $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\left((1+\dfrac{1}{n})^{1/2}-1\right)$. On est donc ramené à une forme indéterminée du type $\infty \times 0$. On utilise les développements limités, voir chapite 7, qui montrent que $(1+\dfrac{1}{n})^{1/2} = 1+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{n}\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$.
Donc $(1+\dfrac{1}{n})^{1/2}-1 = \dfrac{1}{2n}(1+2\varepsilon_n) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n}$.
Par suite $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n^{1/2}}$ donc admet pour limite 0.

Chapitre 3

Continuité

3.1 Rappels et définitions

Définition 3.1.1. *i) Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$, tels que $f(x)$ existe. On le note* $\operatorname{Def} f$.

ii) L'image d'un point $x \in \operatorname{Def} f$ est $f(x)$. On note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble des images des points $x \in \operatorname{Def} f$ par f. L'image d'une partie $I \subset \operatorname{Def} f$ est l'ensemble des images des points de I par f et est notée $f(I)$.

iii) Les antécédents d'un point $y \in \operatorname{Im} f$ sont les points $x \in \operatorname{Def} f$ tels que $f(x) = y$.

iii) L'image réciproque d'un ensemble $J \subset \operatorname{Im} f$ est l'ensemble des antécédents des points de J par f c'est-à-dire l'ensembles des point $x \in \operatorname{Def} f$ tels que $f(x) \in J$.

Voici des représentations de l'image d'une partie $I \in \operatorname{Def} f$ d'une fonction f ou de l'image réciproque d'un intervalle J par f :

$$f(I) == \{f(x) \mid x \in I\}$$

$$f^{-1}(J) = \{x \in \operatorname{Def} f \mid f(x) \in J\}$$

Définition 3.1.2. *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

i) Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée par une constante réelle M si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.

ii) Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est minorée par une constante réelle m si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

iii) Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe deux constantes réelles M et m telles que pour tout $x \in I$, on ait $m \leq f(x) \leq M$.

iv) Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone si pour tout x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ (croissante) ou $f(x_1) \geq f(x_2)$ (décroissante).

v) Dans le cas où l'intervalle I est symétrique par rapport à l'origine, une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, respectivement impaire, si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$, respectivement $f(-x) = -f(x)$.

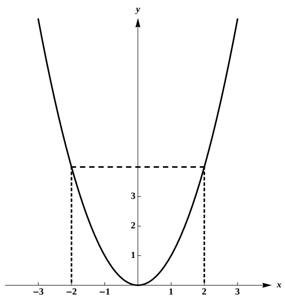
vi) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique, de période T si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Remarque.

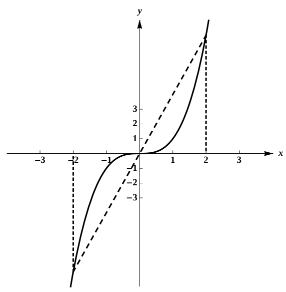
i) Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq a$.

ii) L'étude d'une fonction périodique se fait sur un intervalle de longueur égale à sa période. On prolonge ensuite à $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.

iii) Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy et le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O.



Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire

Définition 3.1.3. *Composition, restriction et recollement.*

i) On considère deux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\operatorname{Im} f \subset J$. La composée $g \circ f$ de f par g est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in I$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$, soit

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

ii) La restriction d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à un sous-ensemble $I' \subset I$ est la fonction $f_{I'} : I' \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I'$, $f_{I'}(x) = f(x)$.

iii) On considère deux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que les sous-ensembles I et J soient consécutifs et $I \leq J$. On appelle $x_0 = \max\ I = \min\ J$. Si $f(x_0) = g(x_0)$, on appelle recollement des fonctions f et g la fonction $h : I \cup J \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $h(x) = g(x)$ si $x \in J$ et $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$.

3.2 Continuité d'une fonction en un point

Définition 3.2.1. *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. La fonction f est continue en x_0 si $f(x)$ converge vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.*

Exemple 3.2.2.

i) Toute fonction Lipschitzienne, φ, c'est-à-dire telle qu'il existe $a > 0$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq a|x - y|$ pour tout couple x, y est continue en tout point de son domaine de définition.

ii) La fonction g telle que $g(x) = x^2$ est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

iii) *La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$ et $h(x) = 1$ pour tout $x > 0$ n'est pas continue en 0.*

iv) *La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, y compris 0.*

i) Soit $V(f(x_0)) =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ un voisinage de $f(x_0)$.
Alors si $x \in]x_0 - \dfrac{\varepsilon}{a}, x_0 + \dfrac{\varepsilon}{a}[$, $f(x) \in V(f(x_0))$ et ceci prouve la continuité de f au point x_0.

ii) Pour la fonction g, on écrit : $|g(x) - g(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$.
Puisqu'on cherche la limite de $f(x)$ quand $x \to x_0$, on peut supposer que x est dans l'intervalle $[x_0 - 1, x_0 + 1]$.
Dans ce cas : $|g(x) - g(x_0)| \leq (2|x_0| + 1)|x - x_0|$. Le *i)* montre que la fonction g est continue en x_0.

iii) La fonction h converge vers 0 quand $x \to 0^-$ mais sa limite quand $x \to 0^+$ vaut 1. Elle n'admet donc pas de limite quand $x \to 0$ et donc n'est pas continue en ce point.

iv) Par l'inégalité triangulaire, 1.3.4 , pour tous réels x et y, on a : $||x| - |y|| \leq |x-y|$.
Cette fonction est donc 1-lipschitzienne et donc continue en tout point.

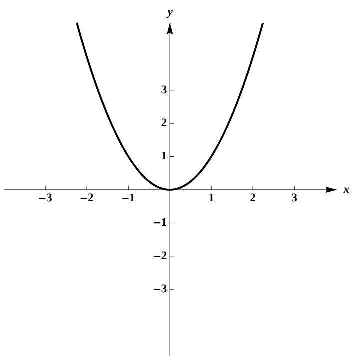


FIGURE 3.1 – Fonction g

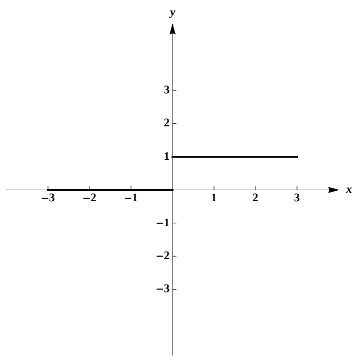


FIGURE 3.2 – Fonction h

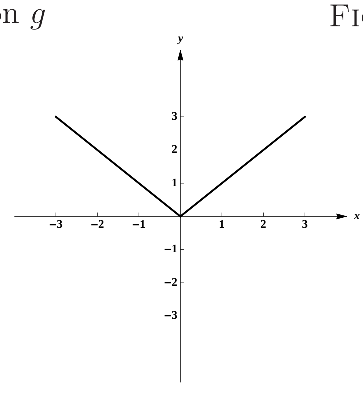


FIGURE 3.3 – Fonction f

Comme pour les limites, on peut définir la continuité à droite ou à gauche :

Extension 3.2.3. *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. La fonction f est continue à droite (respectivement à gauche) lorsque $x \to x_0$ si $f(x)$ converge vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 et $x > x_0$, (respectivement $x < x_0$).*

Si une fonction f est continue à droite et à gauche en un point $x_0 \in I$, alors elle est continue en x_0.

Théorème 3.2.4. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) f est continue en x_0
ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans I qui converge et a pour limite x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $f(x_0)$.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence directe du théorème 2.4.5 où l'on remplace la limite l de la fonction f quand $x \to x_0$ par $f(x_0)$. □

Proposition 3.2.5. *Soit $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*
i) Si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ et fg sont continues en x_0
ii) Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de x_0, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence directe de la proposition 2.5.3 où l'on remplace les limites l ou l' des fonctions quand $x \to x_0$ par leur valeur en x_0. □

La proposition 3.2.5 reste vraie si l'on considère la continuité à droite, respectivement à gauche.

Proposition 3.2.6. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $J \in \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$.*
Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Démonstration. Soit U un voisinage de $g \circ f(x_0)$.
Par continuité de g en $f(x_0)$, il existe un voisinage V de $f(x_0)$ tel que si $y \in V$, alors $g(y) \in U$.
Par continuité de f en x_0, il existe un voisinage W de x_0 tel que si $x \in W$, alors $f(x) \in V$.
En appliquant cette propriété avec $y = f(x)$, on en déduit que si $x \in W$, alors $g \circ f(x) \in U$, ce qui prouve la continuité de $g \circ f$ en x_0. □

Extension 3.2.7. *Recollement par continuité.*
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]b, c] \to \mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^+} g(x)$, on peut recoller les fonctions f et g au point b et on obtient une fonction $h : [a, c] \to \mathbb{R}$, continue en b telle que $h(x) = f(x)$ pour $x \in [a, b[$, $h(x) = g(x)$ pour $x \in]b, c]$ et $h(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^+} g(x)$.

3.3 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 3.3.1. *Soit I un intervalle ouvert. Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur I si elle est continue en tout point de $x_0 \in I$.*
Si la fonction f est définie sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, on dira que f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout point $x_0 \in]a,b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

Par application de la proposition 3.2.5, on obtient immédiatement :

Proposition 3.3.2. *La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annulle pas) de fonctions continues sur I sont continues sur I.*
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J tel que $f(I) \subset J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur I et si g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Théorème 3.3.3. *Théorème des valeurs intermédiaires.*
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur I et soient a et b deux points de I. Alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans $[a,b]$. Donc en particulier si I est un intervalle, $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Soit y un point compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Si $y = f(a)$ ou $f(b)$, il n'y a rien à démontrer.
On peut donc supposer $y \neq f(a)$ et $y \neq f(b)$. Supposons par exemple $f(a) < f(b)$ et soit $f(a) < y < f(b)$.
Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) < y\}$ et soit $x_0 = \sup\ A$.
Par définition de la borne supérieure, voir 2.2.9, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Par continuité de la fonction f, en appliquant le théorème 3.2.4, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$. Comme $f(x_n) < y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le théorème 2.4.1, $f(x_0) \leq y$.

Le point x_0 ne peut donc pas être égal à b car sinon, on aurait $f(b) = f(x_0) \leq y$, ce qui contredit le choix de y. Par définition de la borne supérieure, si $x \in]x_0, b]$, x n'est pas dans A et par suite $f(x) \geq y$. Par le théorème 2.4.1, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \geq y$. Par continuité de f, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \geq y$. Donc finalement $f(x_0) = y$. □

Théorème 3.3.4. *Théorème de Weierstrass.*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes dans $[a,b]$.

Démonstration. Pour montrer que l'image de $[a,b]$ par f, $f\left([a,b]\right)$, est une partie bornée de $\mathbb{R}$, on procède par contraposée : supposons que $f\left([a,b]\right)$ ne soit pas majorée. Alors, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in [a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x_n) \geq n$.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, 2.4.7, il existe une sous suite $(x_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $[a,b]$. Soit x_0 sa limite. La suite $\left(f(x_{p(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée puisque $f(x_{p(n)}) \geq p(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la fonction f n'est pas

continue en x_0.

Pour montrer que f atteint ses bornes, posons $M = \sup f([a,b])$ et $m = \inf f([a,b])$. Par les propriétés des bornes supérieure ou inférieure, 2.2.9, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in [a,b]$ et $f(x_n) \geq M - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f(x_n) = M$.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, 2.4.7, il existe une sous-suite $(x_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers un point $x_0 \in [a,b]$. La fonction f étant continue, on peut appliquer le théorème 3.2.4, la suite $f\left((x_{p(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$. D'où $f(x_0) = M$.
On procède de la même façon pour la borne inférieure. □

Corollaire 3.3.5. $f([a,b]) = [m, M]$.

Extension 3.3.6. *Continuité par morceaux.*
Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue par morceaux s'il existe un découpage de l'intervalle* $[a,b]$ *défini par* $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ *tel que* f *est continue sur chaque sous-intervalle* $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, n-1$ *et admet des limites à gauche et à droite en tout point* x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, *à gauche en* x_0 *et à droite en* x_n.

On peut remarquer que les valeurs de la fonction f aux points x_i ne jouent aucun rôle dans cette définition.

Chapitre 4

Dérivabilité

4.1 Dérivabilité d'une fonction en un point

Définition 4.1.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. La fonction f est dérivable en $x_0 \in I$ si la fonction taux d'accroissement τ, définie sur $I \setminus x_0$ par $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, converge vers une limite finie lorsque $x \to x_0$. Dans ce cas, la limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.*

Application 4.1.2. *Le taux d'accroissement de f entre x et a est la pente de la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$. Lorsque $x \to x_0$, la corde tend vers une position limite de pente $f'(x_0)$, qui est la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.*

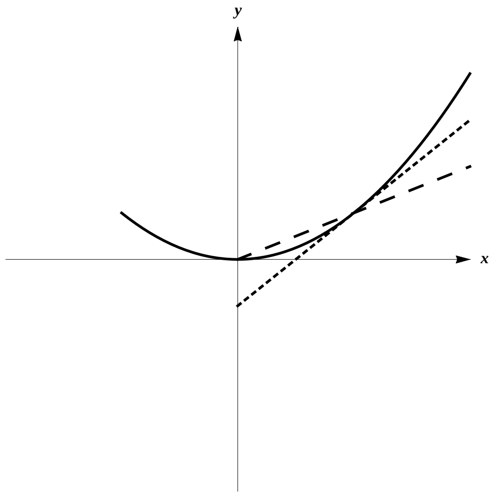


Figure 4.1 – Fonction dérivable

Grâce aux notations de Landau, définies en 2.5.4, on peut réécrire la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point par la proposition suivante, qui a l'avantage de ne pas faire intervenir de dénominateur :

Proposition 4.1.3. *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel λ tel que*

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$$

où $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.
La dérivée de f en x_0 est alors égale à λ.

Proposition 4.1.4. *Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 et la réciproque est fausse.*

Démonstration. Supposons qu'une fonction f soit dérivable en x_0. Alors, par la proposition 4.1.3 on peut écrire $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$. D'où :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f'(x_0)||x - x_0| + o(x - x_0)$$

Ceci implique bien que si x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ et donc f est bien continue en x_0. □

Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de trouver un exemple d'une fonction continue en un point et non dérivable en ce point :

Exemple 4.1.5. $f(x) = |x|$ *est continue et n'est pas dérivable en* 0.

En effet, en posant $\tau(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$, il est clair que $\lim\limits_{x\to 0^+} \tau(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \tau(x) = -1$. L'accroissement τ n'admet donc pas de limite quand $x \to 0$ et f n'est pas dérivable en 0.

Proposition 4.1.6. *Soit $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.*
i) *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f+g$ et fg sont dérivables en x_0, avec*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \text{ et } (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ii) *Si f et g sont dérivables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 avec*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Démonstration. i) Le résultat sur la dérivation d'une somme de fonctions est évident. Montrons celui sur le produit de deux fonctions, en écrivant :

$$fg(x) - fg(x_0) = f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = f(x)\left(g(x) - g(x_0)\right) + g(x_0)\left(f(x) - f(x_0)\right)$$

D'où en divisant par $x - x_0$:

$$\frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lorsque $x \to x_0$, $f(x) \to f(x_0)$ et donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{fg(x)-fg(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\frac{(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} + g(x_0)\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\right]\\ &= f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)\end{aligned}$$

ii) Pour le quotient, on écrit :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} = f(x)\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}+g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

Lorsque $x \to x_0$, $f(x) \to f(x_0)$ et $g(x) \to g(x_0)$ et donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} + \frac{g(x_0)}{g(x_0)^2}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.7. *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$.*
Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, avec

$$(g\circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right)f'(x_0)$$

Démonstration. Si f est dérivable en x_0, on écrit, à l'aide de la proposition 4.1.3 :

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon_1(x-x_0)$$

avec $\varepsilon_1(x-x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$.

Si g est dérivable en $f(x_0)$, on écrit, de même :

$$g\circ f(x) - g\circ f(x_0) = g'\left(f(x_0)\right)\left(f(x)-f(x_0)\right)+\left(f(x)-f(x_0)\right)\varepsilon_2\left(f(x)-f(x_0)\right)$$

avec $\varepsilon_2\left(f(x)-f(x_0)\right) \to 0$ quand $f(x) \to f(x_0)$.

Mais comme par la proposition 4.1.4, f est continue en x_0, quand x tend vers x_0, $f(x) \to f(x_0)$ et $\varepsilon_2\left(f(x)-f(x_0)\right) \to 0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0} &= g'\left(f(x_0)\right)\left(f'(x_0)+\varepsilon_1(x-x_0)\right)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\varepsilon_2\left(f(x)-f(x_0)\right)\\ &= g'\left(f(x_0)\right)f'(x_0)+\varepsilon(x-x_0)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x-x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$. Ceci prouve bien la dérivabilité de $g \circ f$ en x_0 et $(g\circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right)f'(x_0)$. □

Corollaire 4.1.8. *Si f et g sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre, f étant dérivable en x_0 et g en $y_0 = f(x_0)$, avec $g'(f(x_0)) \neq 0$ et $f'(g(y_0)) \neq 0$, on a $f'(x_0) = \dfrac{1}{g'(f(x_0))}$ et de même $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$.*

Démonstration. On applique la proposition 4.1.7 en utilisant le fait que pout tout $x \in I$, $g \circ f(x) = x$ et pour tout $y \in J$, $f \circ g(y) = y$. □

Extension 4.1.9. *Comme pour les limites et la continuité, on peut définir la dérivabilité à droite ou à gauche en un point x_0 : f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en x_0 si la fonction taux d'accroissement τ, définie sur $I \setminus x_0$ par $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, admet une limite lorsque $x \to x_0^+$ (respectivement lorsque $x \to x_0^-$). Dans ce cas, la limite s'appelle la dérivée à droite (respectivement à gauche) de f en x_0 et se note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$).*
Ces définitions sont utilisées en particulier aux points a et b lorsque la fonction f est définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$.

4.2 Fonctions dérivables sur un intervalle

Définition 4.2.1. *Soit I un intervalle ouvert. Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.*
Si f est définie sur un intervalle $[a, b]$, on dira que f est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b.

Les deux propositions suivantes se déduisent immédiatement des propositions 4.1.4, 4.1.6 et 4.1.7 :

Proposition 4.2.2. *Toute fonction dérivable sur I est continue sur I. La réciproque est fausse.*

Proposition 4.2.3. *Les somme, produit, quotient (dans le cas où le dénominateur ne s'annulle pas) de fonctions dérivables sur I sont dérivables sur I.*
Si f est dérivable sur I et $f(I) \subset J$ et si g est dérivable sur J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I.

Exemple 4.2.4.

i) *La fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$.*

ii) *La fonction $f(x) = \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.*

Application 4.2.5. *La dérivée d'une fonction croissante est positive ou nulle, la dérivée d'une fonction décroissante est négative ou nulle.*

En effet, le taux d'accroissement d'une fonction croissante est positif ou nul et celui d'une fonction décroissante est négatif ou nul et on peut appliquer le théorème 2.4.1 : à la limite, la valeur de la dérivée sera bien positive ou nulle dans le cas d'une fonction croissante ou négative ou nulle dans l'autre cas.
La réciproque de cette propriété est vraie également comme on le verra après le théorème des accroissements finis, 4.4.2.

4.3 Dérivées successives

Définition 4.3.1. *Lorsque qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I et que sa dérivée f' est aussi dérivable sur I, la dérivée de f' est notée f'' et est appelée dérivée seconde de f sur I.*

Définition 4.3.2. *En itérant ce processus, on obtient les dérivées successives de f : si la dérivée d'ordre $n-1$ de f, $f^{(n-1)}$, est dérivable sur I, sa dérivée est notée $f^{(n)}$ et est appelée dérivée d'ordre n de f sur I. Noter que $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$.*

Définition 4.3.3. *Lorsque qu'une fonction f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I, on dit qu'elle est n-fois dérivable. Si de plus, sa dérivée n-ième est continue (et donc aussi toutes les précédentes), on dit que f est de classe C^n.*

Définition 4.3.4. *Lorsque qu'une fonction f admet des dérivées d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur I, on dit qu'elle est indéfiniment dérivable ou de classe C^∞.*

Exemple 4.3.5. *Les fonctions polynômes et la fonction exponentielle sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La fonction logarithme est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. On verra au chapitre 5 que les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont de classe C^∞ sur leurs domaines de définition. On verra également au chapitre 6 que les fonctions réciproques des fonctions usuelles sont de classe C^∞ là où leurs dérivées sont définies.*

4.4 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 4.4.1. *Théorème de Rolle*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si la fonction f est constante, sa dérivée est nulle et il n'y a rien à démontrer.
Sinon, par application du théorème de Weierstrass, 3.3.4, f admet un extremum $c \in [a, b]$. Supposons que cet extremum soit un maximum.
Alors si $h > 0$, on a

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$$

Puisque f est dérivable en c, ces taux d'accroissement admettent une même limite quand $h \to 0$, qui ne peut être que 0. D'où $f'(c) = 0$. □

Théorème 4.4.2. *Théorème des accroissements finis*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction g, continue, dérivable sur $]a,b[$, définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Comme $g(a) = g(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g'(c) = 0$.
Or $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ce qui implique bien que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Application 4.4.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors :*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$$

En effet, en appliquant le théorème des accroissements finis, 4.4.2, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)||b-a| \leq M|b-a|$$

Exemple 4.4.4. *La dérivé de la fonction sinus est la fonction cosinus, qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$. Comme de plus* $\sin 0 = 0$, *le théorème des accroissement finis implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|\sin x| \leq |x|$.*

4.5 Sens de variation

Proposition 4.5.1. *Fonctions croissantes et décroissantes*
i) Si la dérivée d'une fonction dérivable $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est positive ou nulle (respectivement négative ou nulle), la fonction f est croissante (respectivement décroissante).
ii) Si la dérivée d'une fonction dérivable $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement positive (respectivement strictement négative), la fonction f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Démonstration. Supposons que la dérivée d'une fonction f soit positive ou nulle sur I et soit $x < y$ deux points de I. Alors par le théorème des accroissements finis, 4.4.2, il existe $c \in [x,y]$ tel que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0$. On en déduit que $f(y) \geq f(x)$ et donc que la fonction f est croissante.
Le cas négatif se traite de la même façon ainsi que les cas strictement positif ou strictement négatif.

□

Définition 4.5.2. *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un maximum (respectivement minimum) local en un point $x_0 \in I$ s'il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que pour tout $x \in V(x_0)$, on ait $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).*
Ce maximum (respectivement minimum) est global si ces inégalités sont vraies sur tout l'intervalle I.

Proposition 4.5.3. *Soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si x_0 est un extremum (maximum ou minimum) local d'une fonction dérivable $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors sa dérivée s'annule en x_0. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Soit x_0 un maximum local d'une fonction dérivable $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Alors, si $h > 0$, $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ et $f(x_0 - h) - f(x_0) \leq 0$.
En passant à la limite quand $h \to 0$, on obtient à la fois :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \geq 0$$

soit $f'(x_0) = 0$.
Le cas d'un minimum se traite de la même façon. □

Exemple 4.5.4. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet une dérivée nulle en $x_0 = 0$ alors qu'elle n'a pas de minimum local en ce point.*

La méthode, lorsqu'on cherche des extrema d'une fonction, est d'abord de déterminer les points où la dérivée de la fonction s'annule. Ensuite, il faut vérifier en étudiant les variations de la fonction si ces points correspondant bien à des extrema.

Le sens de variation d'une fonction dérivable se représente par un tableau de variation : la première ligne indique les valeurs de la variable x, la seconde ligne indique le signe de la dérivée et on en déduit sur la troisième ligne, le sens de variation de la fonction. Par exemple, voici la tableau de variation de la fonction sinus sur $[0, \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Exemple 4.5.5. Fonctions convexes.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si quelque soit x et y dans I et quelque soit $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Cette propriété veut dire que le graphe d'une fonction convexe est au dessous de sa corde.

Proposition 4.5.6. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.*

Démonstration. Supposons que la fonction dérivable f soit croissante et soit $x < y$. Si $c \in]x, y[$, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $c = \lambda x + (1-\lambda)y$, ou encore $c - x = (1-\lambda)(y-x)$. On a donc $f(c) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, soit encore $f(c) - f(x) \leq (1-\lambda)\left(f(y) - f(x)\right)$.

On en déduit que $\dfrac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ et en passant à la limite quand $c \to x$:

$$f'(x) = \lim_{c \to x} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

De la même façon, on obtient l'inégalité $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \lim\limits_{c \to y} \dfrac{f(y) - f(c)}{y - c} = f'(y)$ et par suite $f'(x) \leq f'(y)$. La dérivée de f est donc bien croissante.

Réciproquement, procédons par contraposée : supposons que la fonction f ne soit pas convexe, alors il existe trois points, x, y, et $c = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$, où $\lambda \in]0, 1[$, tels que $f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
Le même calcul que ci-dessus montre que :

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(y) - f(c)}{y - c}$$

Par le théorème des accroissement finis, 4.4.2, on en déduit qu'il existe $d_1 \in [x, c]$ et $d_2 \in [c, y]$ tels que

$$f'(d_1) = \frac{f(c) - f(x)}{c - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(y) - f(c)}{y - c} = f'(d_2)$$

et ceci montre que la dérivée f' n'est pas croissante. $\square$

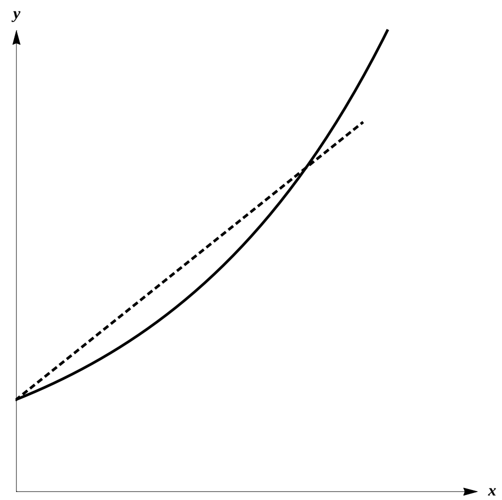


FIGURE 4.2 – Fonction convexe

Exemple 4.5.7. Fonctions concaves.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est concave si quelque soit x et y dans I et quelque soit $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Cette propriété veut dire que le graphe d'une fonction concave est au dessus de sa corde.

On peut montrer comme pour les fonctions convexes que la proposition ci dessous est vérifiée :

Proposition 4.5.8. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante.*

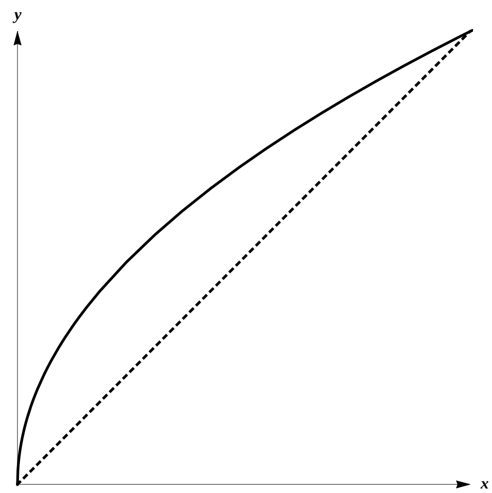


Figure 4.3 – Fonction concave

Extension 4.5.9.

i) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si l'inégalité stricte*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

est vraie dès que $x \neq y$.

ii) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement concave si l'inégalité stricte*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

est vraie dès que $x \neq y$.

Chapitre 5

Fonctions usuelles

5.1 Fonctions puissances entières

Définition 5.1.1. *Soit k un entier relatif. La fonction qui à tout réel x associe le réel x^k est appelée fonction puissance k-ième.*
Si $k < 0$, cette fonction n'est pas définie en 0.
Pour $x \neq 0$, $x^k = \dfrac{1}{x^{-k}}$.
Par convention, x^0 est la fonction constante égale à 1.

Proposition 5.1.2. *Etant donné un réel $x \neq 0$ et deux entiers relatifs k_1 et k_2, on a :*

$$x^{k_1+k_2} = x^{k_1}x^{k_2} \qquad \text{et} \qquad x^{k_1k_2} = \left(x^{k_1}\right)^{k_2}$$

Démonstration. Ces égalités sont des conséquences de l'associativité de la multiplication sur $\mathbb{R}$, voir 1.2.6. □

Proposition 5.1.3. *Soit k un entier strictement positif. La fonction puissance $f(x) = x^k$, définie sur $\mathbb{R}$ est paire si k est pair et impaire si k est impair.*
Soit k un entier strictement négatif. La fonction puissance $f(x) = x^k$, définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est paire si k est pair et impaire si k est impair.

Démonstration. Les propriétés des opérations addition et multiplication sur $\mathbb{R}$, voir 1.2.6, conduisent à la règle des signes, qui implique en particulier les relations suivantes : $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair.
Donc, pour $x \neq 0$, si k est pair, on a $(-x)^k = (-1)^k x^k = x^k$ et si k est impair $(-x)^k = (-1)^k x^k = -x^k$. □

Proposition 5.1.4.
i) Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}$ si k est positif et, si k est négatif, sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, avec pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

ii) Les fonctions puissances sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ si k est positif et, si k est négatif, sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Démonstration. Pour $k > 0$, on utilise la formule du binôme de Newton :

$$(x+h)^k - x^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j h^j x^{k-j} - x^k = hkx^{k-1} + O(h^2)$$

en utilisant les notations de Landau 2.5.4.
D'où :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^k - x^k}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(kx^{k-1} + O(h)\right) = kx^{k-1}$$

Pour $k < 0$, on pose $l = -k$ et on écrit

$$(x+h)^k - x^k = \frac{1}{(x+h)^l} - \frac{1}{x^l} = \frac{x^l - (x+h)^l}{x^l(x+h)^l} = \frac{-hlx^{l-1} + O(h^2)}{x^l(x+h)^l}$$

D'où

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^k - x^k}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^l} - \frac{1}{x^l}\right) = \frac{-lx^{l-1}}{x^{2l}} = kx^{k-1}$$

□

En étudiant le signe de la dérivée, on obtient le sens de varaition des fonctions puissance entières :

Proposition 5.1.5. *Sens de variation*
Soit n un entier naturel non nul.

i) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

ii) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

iii) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

iv) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

En remarquant que pour $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, on peut retrouver toutes les limites de la proposition ci-dessous par parité ou imparité et passage au quotient :

Proposition 5.1.6. *Limites des focntions puissances entières.*
Soit n un entier naturel non nul.

i) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$

ii) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^n$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$

iii) Si n est impair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ tend vers 0^+ en $+\infty$ et vers 0^- en $-\infty$. Elle tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers $-\infty$ en 0^-.

iv) Si n est pair, la fonction puissance définie par $f(x) = x^{-n}$ tend vers 0^+ en $+\infty$ et en $-\infty$. Elle tend vers $+\infty$ en 0^+ et en 0^-.

Il y a donc 4 tableaux de variation différents selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$:

n pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
nx^{n-1}		$-$	0	$+$	
x^n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
nx^{n-1}		$+$	0	$+$	
x^n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-nx^{-n-1}$		$+$	||	$-$	
x^{-n}	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

n impair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-nx^{-n-1}$		$-$	||	$-$	
x^{-n}	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

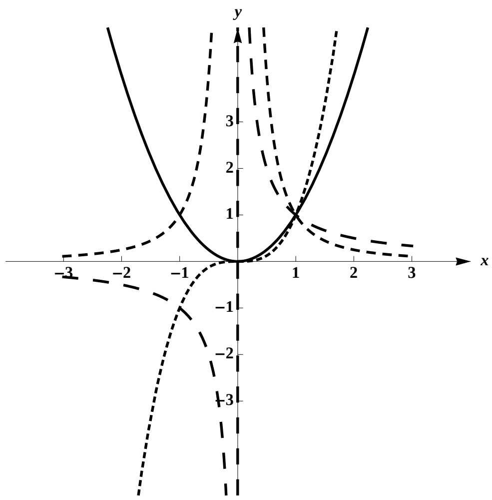


FIGURE 5.1 – Fonctions puissances entières

5.2 Fonction logarithme népérien

Définition 5.2.1. *Le logarithme népérien est la fonction, notée* ln*, définie sur* $]0, +\infty[$ *par la relation* $\ln\ x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$*, où* $\displaystyle\int_1^x$ *est l'intégrale de Riemann.*

La fonction ln est donc la primitive, qui s'annule en $x = 1$, de la fonction continue $\dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$, elle est donc dérivable, de dérivée égale à $\dfrac{1}{t}$, qui est strictement positive.

Proposition 5.2.2. *Le logarithme népérien vérifie la relation*

$$\ln(xy) = \ln\ x + \ln\ y$$

pour tous $x, y > 0$.

Démonstration. Soit $x, y > 0$ donnés.
On utilise la relation de Chasles : $\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt.$
Dans la deuxième intégrale, on applique le changement de variable $s = \frac{t}{x}$, ce qui donne :

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_1^{y} \frac{1}{s}\,ds = \ln x + \ln y$$

□

En appliquant cette formule aux deux variables $\frac{x}{y}$ et y, on obtient immédiatement :

Remarque. Pour tout $x, y > 0$, on a :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

Corollaire 5.2.3. *Pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\ln(x^n) = n\ln x \text{ et } \ln(x^{-n}) = -n\ln x$$

Démonstration. On procède par récurrence.
La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre n. Alors, on peut appliquer la proposition 5.2.2 :

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(xx^n) = \ln x + \ln x^n) = (n+1)\ln x$$

et

$$\ln(x^{-(n+1)}) = \ln(x^{-1}x^{-n}) = \ln(x^{-1}) + \ln(x^{-n}) = -\ln x - n\ln x = -(n+1)\ln x$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.
La récurrence est donc bien démontrée et la proposition est vraie pour tout entier naturel n. □

Corollaire 5.2.4. *La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et vers $-\infty$ lorsque $x \to 0$.*

Démonstration. Par construction, la fonction ln admet une dérivé strictement positive et donc est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Pour montrer qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, il suffit de montrer qu'elle n'est pas majorée. Or par le corollaire 5.2.3, on peut écrire $\ln(2^n) = n\ln 2$ qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. La fonction ln n'est donc pas majorée sur $]0, +\infty[$ et donc elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

De la même façon, montrons que la fonction ln n'est pas minorée sur $]0, +\infty[$ en écrivant $\ln(2^{-n}) = -n\ln 2$ qui tend vers $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$. La fonction ln n'est donc pas minorée sur $]0, +\infty[$ et donc elle tend vers $-\infty$ lorsque $x \to 0$. □

Le tableau de variation de la fonction ln est donc :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$+$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. Etant donné que la dérivée de la fonction ln est de classe C^∞, la fonction ln est elle-même de classe C^∞.

5.3 Fonction exponentielle

Comme on le verra au chapitre 6, la fonction ln étant strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, elle est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,+\infty[$et on peut définir sa fonction réciproque :

Définition 5.3.1. *La fonction exponentielle, notée* exp*, définie sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $]0,+\infty[$ *est la fonction réciproque du logarithme népérien.*

Proposition 5.3.2. *La fonction* exp *vérifie la relation*

$$\exp(x+y) = \exp x \ \exp y$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $x = \ln u$ et $y = \ln v$, où $u, v \in]0,+\infty[$. Alors,

$$\exp(x+y) = \exp(\ln u + \ln v) = \exp(\ln(uv)) = uv = \exp x \ \exp y$$

□

En appliquant cette formule aux deux variables x et $-x$, on obtient immédiatement :

Remarque. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 = \exp 0 = \exp x \ \exp(-x)$$

D'où

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

On pose $e = \exp 1$. Par analogie avec les fonctions puissances, on note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = e^x$. On peut donc reformuler la proposition 5.3.2 en :

Remarque. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{(x+y)} = e^x e^y$$

Proposition 5.3.3. *Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on a :*

$$(e^x)^n = e^{nx} \qquad \text{et} \qquad (e^x)^{-n} = \frac{1}{e^{nx}}$$

Démonstration. On procède par récurrence.
La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre n. Alors, on peut appliquer la proposition 5.3.2 :

$$(e^x)^{(n+1)} = e^x(e^x)^n = e^x e^{nx} = e^{(n+1)x}$$

et

$$(e^x)^{-(n+1)} = (e^x)^{-1}(e^x)^{-n} = e^{-(n+1)x} = \frac{1}{e^{(n+1)x}}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.
La récurrence est donc bien démontrée et la proposition est vraie pour tout entier naturel n. □

Théorème 5.3.4. *La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée lui est égale.*

Démonstration. Etant donné que la fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln, qui est continue et dérivable sur son domaine de définition, avec une dérivée qui ne s'annulle pas, d'après les propositions 6.2.4 et 6.2.5, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(\exp x)' = \frac{1}{(\ln)'(\exp x)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\exp x}} = \exp x$$

□

Corollaire 5.3.5. *La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, elle tend vers 0 lorsque $x \to -\infty$ et vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$.*

Démonstration. Ces propriétés se déduisent des propriétés de la fonction ln. □

Le tableau de variation de la fonction exp est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque. Etant donné que la fonction exp est égale à sa dérivée, elle est de classe C^∞.

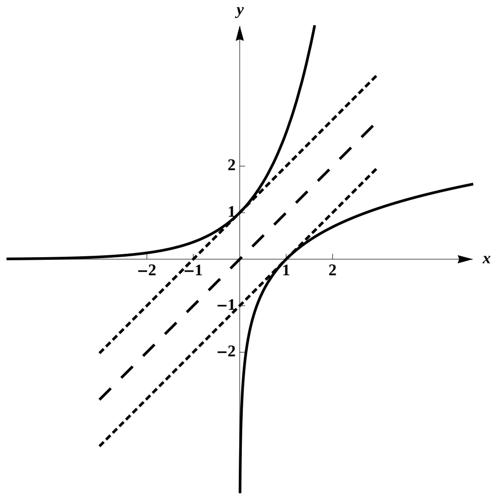


FIGURE 5.2 – Fonctions logarithme et exponentielle

5.4 Fonctions puissances quelconques

Grâce à la fonction exp, on peut définir les puissances quelconques des réels positifs :

Définition 5.4.1. *Etant donné un réel strictement positif x et un réel b quelconque, on peut définir la puissance b-ième de x par : $x^b = e^{b \ln x}$.*

En particulier, si on applique cette définition avec un entier $n \in \mathbb{Z}$, on retrouve la définition des puisances entières sur $]0, +\infty[$ car : $x^n = e^{n \ln x} = e^{\ln x^n} = x^n$.

Attention, contrairement aux puissances entières, on ne peut pas définir les puissances non entières sur $]-\infty, 0[$ puisque le logarithme n'est pas défini sur cet intervalle. Le fait qu'on puisse le faire pour les puissance entières est dû à la règles des signes qui n'a pas d'extension aux puissances non entières.

Proposition 5.4.2. *Etant donné un réel $x > 0$ et deux réels b_1 et b_2, on a :*

$$x^{b_1+b_2} = x^{b_1}x^{b_2} \text{ et } x^{b_1 b_2} = \left(x^{b_1}\right)^{b_2}$$

Démonstration. Pour démontrer la première propriété, on applique la définition 5.4.1 :

$$x^{b_1+b_2} = e^{(b_1+b_2)\ln\ x} = e^{(b_1 \ln x + b_2 \ln x)} = e^{(b_1 \ln x)}e^{(b_1 \ln x)} = x^{b_1}x^{b_2}$$

Pour la seconde propriété, comme $x^{b_1} = e^{b_1 \ln x}$, on a $\ln\left(x^{b_1}\right) = b_1 \ln x$ et donc :

$$x^{b_1 b_2} = e^{(b_1 b_2 \ln x)} = e^{b_2 \ln (x^{b_1})} = (x^{b_1})^{b_2}$$

□

Proposition 5.4.3. *Etant donné deux réels $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et un réel quelconque b, on a :*

$$(x_1 x_2)^b = x_1^b x_2^b$$

Démonstration. A nouveau, on applique la définition 5.4.1 :

$$(x_1 x_2)^b = e^{b \ln(x_1 x_2)} = e^{(b \ln x_1 + b \ln x_2)} = e^{b \ln x_1} e^{b \ln x_2} = x_1^b x_2^b$$

□

Cas particulier 5.4.4. *Racine n-ième.*
Etant donné un réel strictement positif x et un entier naturel $n > 0$, la racine n-ième de x est définie par :

$$x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$$

Proposition 5.4.5. *Les fonctions puissances sont de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\left(x^b\right)' = bx^{b-1}$.*
Si b est un réel strictement positif, alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b = 0^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^b = +\infty$
et si b est un réel strictement négatif : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^b = 0^+$.

Démonstration. Les fonctions puissances sont des composées de fonctions de classe C^∞ et donc sont de classe C^∞ en appliquant le proposition 4.1.7.

Ce résultat permet aussi de calculer leurs dérivées pour $x \neq 0$:

$$\left(x^b\right)' = \left(e^{b \ln x}\right)' = e^{b \ln x} \frac{b}{x} = x^b \frac{b}{x} = bx^{b-1}$$

Quand $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$ donc $b \ln x \to -\infty$ si $b > 0$ et alors $x^b = e^{b \ln x} \to 0$;
de même, $b \ln x \to +\infty$ si $b < 0$ et alors $x^{-b} = e^{b \ln x} \to +\infty$.

Quand $x \to +\infty$, $\ln x \to +\infty$ donc $b \ln \ \to +\infty$ si $b > 0$ et alors$x^b = e^{b \ln x} \to +\infty$;
de même, $b \ln x \to -\infty$ si $b < 0$ et alors $x^b = e^{b \ln x} \to 0$. □

Pour établir les tableaux de variations et graphes de ces fonctions, on doit distinguer 3 cas :

$b > 1$

x	0	$+\infty$
bx^{b-1}	0	$+$
x^b	0	$\nearrow$ $+\infty$

$0 < b < 1$

x	0	$+\infty$
bx^{b-1}	$\|$	$+$
x^b	0	$\nearrow$ $+\infty$

$b < 0$

x	0	$+\infty$
bx^{b-1}	$\|$	$-$
x^b	$\|$ $+\infty$	$\searrow$ 0

Proposition 5.4.6. *Croissance comparée.*
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, ou encore, avec les notations de Landau $\ln x = o_{x \to +\infty}(x)$.

Démonstration. On utilise la propiété de croissance de l'intégrale :
pour $x > 1$,

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \left[\sqrt{t}\right]_1^x = 2(\sqrt{x} - 1) \leq 2\sqrt{x}$$

Donc $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}} \to 0$ quand $x \to +\infty$. □

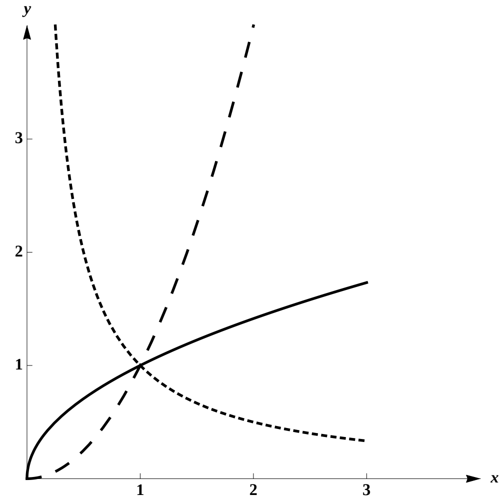


FIGURE 5.3 – Fonctions puissances non entières

Corollaire 5.4.7. *Si a est un nombre réel strictement positif, on a :*

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a \ln x = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$,

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{\ln x} = +\infty$,

iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^a e^x = 0$.

Démonstration. i) Si $x \to 0^+$, on pose $y = \dfrac{1}{x^a}$ et alors $y \to +\infty$.

Donc $x^a \ln x = \dfrac{\ln\ y^{-1/a}}{y} = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\ln\ y}{y} \to 0$.

ii) Si $x \to +\infty$, on pose $y^a = e^x$ et alors $y \to +\infty$.

Donc $\dfrac{e^x}{x^a} = \dfrac{y^a}{(\ln\ y^a)^a} = \dfrac{1}{a^a}\left(\dfrac{y}{\ln\ y}\right)^a \to +\infty$

iii) Si $x \to +\infty$, on pose $y = x^a$ et alors $y \to +\infty$.

Donc $\dfrac{x^a}{\ln\ x} = \dfrac{y}{\ln\ y^{1/a}} = a\dfrac{y}{\ln\ y} \to +\infty$

iv) Si $x \to -\infty$, on pose $y = -x$ et alors $y \to +\infty$.

Donc $|x|^a e^x = \dfrac{y^a}{e^y} \to 0$ d'après le *ii)*. □

En suivant le même principe, on peut faire d'autres changements de variables, qui fourniront des d'autres énoncés de croissance comparée.

5.5 Fonctions trigonométriques

Les fonctions cosinus (cos) et sinus (sin) sont des fonctions d'un angle en radian. Elles sont définies à partir des mesures des côtés d'un angle aigu d'un triangle rectangle. Pour le cosinus, c'est la mesure du côté adjacent divisée par la mesure de l'hypothénuse et pour le sinus c'est la mesure du côté opposé divisée par la mesure de l'hypothénuse.

Un angle est la mesure en radian d'un arc du cercle trigonométrique de rayon 1. C'est une variable réelle variant de 0 à 2π. Mais comme on peut tourner indéfiniment sur le cercle, cette variable est définie modulo 2π. On peut donc considérer qu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ tout entier.

Les propriétés géométriques du cercle et des triangles rectangles, notamment le théorème de Pythagore, permettent de montrer que ces deux fonctions vérifient les propriétés suivantes (voir aussi l'exercice 5.2) :

Proposition 5.5.1.

i) *Les fonctions* cos *et* sin *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

ii) *Elles sont périodiques de période* 2π.

iii) *La fonction* cos *est paire et la fonction* sin *est impaire.*

iv) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\cos' x = -\sin x$ *et* $\sin' x = \cos x$.

v) *Ces fonctions vérifient l'identité suivante, vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

On étudie le sens de variation de ces fonctions sur $[0, \pi]$ et on complète par parité pour le sinus ou imparité pour le cosinus pour obtenir le sens de variation sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, de longueur 2π. On complète ensuite par périodicité pour obtenir leurs variations sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5.5.2. *Sens de variation*

i) *La fonction* cos *est décroissante de 1 à* -1 *sur* $[0, \pi]$, *prend la valeur 0 en* $\frac{\pi}{2}$ *et sa dérivée s'annule en 0 et* π.

ii) *La fonction* sin *est croissante de 0 à* 1 *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$, *prend la valeur 1 en* $\frac{\pi}{2}$ *et est décroissante de 1 à 0 sur* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. *Sa dérivée s'annule en* $\frac{\pi}{2}$.

Les tableaux de variation de ces fonctions sur $[0, \pi]$ sont donc :

sin

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

cos

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\sin x$	0	$-$		$-$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Pour obtenir les graphes sur $[-\pi, +\pi]$, on complète par symétrie par rapport à l'origine pour le sinus et par symétrie par rapport à l'axe Oy pour le cosinus.

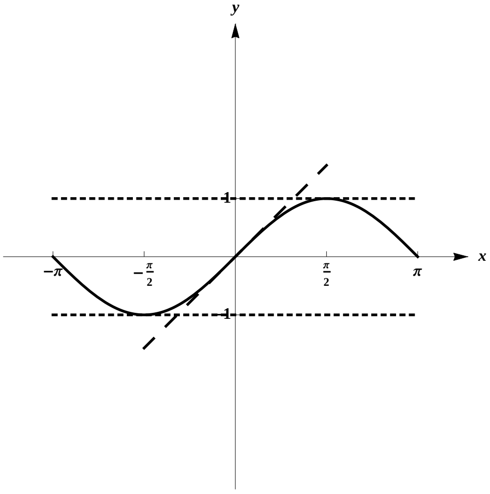


FIGURE 5.4 – Fonctions sinus

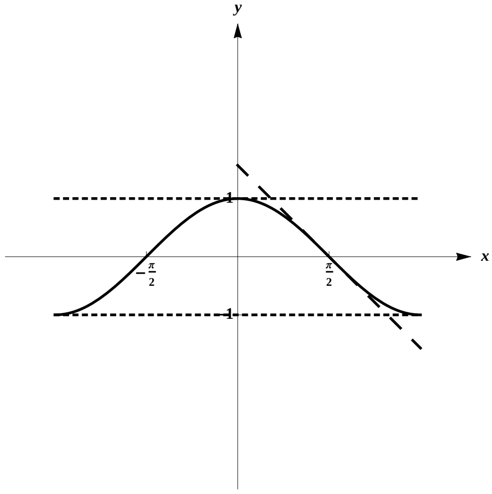


FIGURE 5.5 – Fonctions cosinus

Définition 5.5.3. *Fonction tangente*
Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *on définit la fonction tangente, notée* tan, *par :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos \ x}$$

On peut étendre cette définition à tous les intervalles $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$, *où* $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 5.5.4.

i) *La fonction* tan *est périodique de période* 2π.

ii) *La fonction* tan *est impaire.*

iii) *Pour tout* $x \in]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$, *on a :*

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

iv) *Elle est de classe* C^∞ *sur tous les intervalles* $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 5.5.5. *Sens de variation*
La fonction tan *est croissante sur les intervalles* $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ *et*

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tan x = +\infty \ , \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \tan x = -\infty$$

Le tableau de variation de cette fonction est donc, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\|\|$	$+$		$+$	$\|\|$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

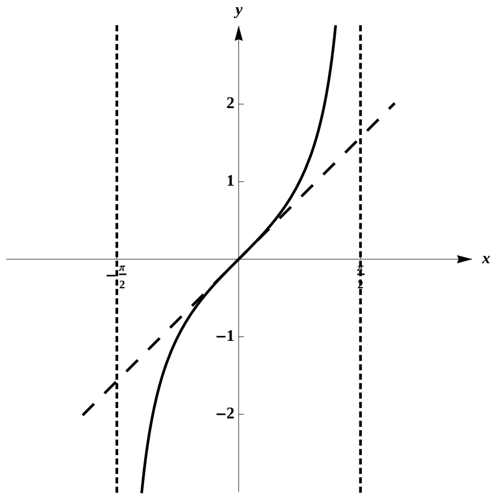


FIGURE 5.6 – Fonction tangente

Annexe 5.5.6. *Formulaire de trigonométrie*

$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(-a) = -\sin a$	$\tan(-a) = -\tan a$
$\cos(a+\pi) = -\cos a$	$\sin(a+\pi) = -\sin a$	$\tan(a+\pi) = \tan a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$
$\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin a$	$\sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a$	$\tan(\frac{\pi}{2} + a) = -\frac{1}{\tan a}$
$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$	$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$	$\tan(\frac{\pi}{2} - a) = \frac{1}{\tan a}$

Formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

De ces formules, on déduit aisément les formules de duplication :

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$, $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ et $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.
Et les formules de linéarisation :

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$
Formules de transformations de sommes en produits :

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

Formules de changement de variables, en posant $t = \tan \dfrac{a}{2}$:

$\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$

5.6 Fonctions hyperboliques

Définition 5.6.1. *Cosinus hyperbolique*
Etant donné un réel x, on appelle cosinus hyperbolique de x le réel, noté ch x*, tel que*

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Définition 5.6.2. *Sinus hyperbolique*
Etant donné un réel x, on appelle sinus hyperbolique de x le réel, noté sh x*, tel que*

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Proposition 5.6.3. *Les fonction* ch *et* sh *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifient :*

$$(\text{ch } x)' = sh\, x \qquad \text{et} \qquad (\text{sh } x)' = \text{ch } x$$

Démonstration. Les fonctions ch et sh sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction exp l'est. Pour le calcul des dérivées, on écrit :

$$(\text{ch } x)' = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x$$

et

$$(\text{sh } x)' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x$$

□

On en déduit immédiatement le sens de variation de ces fonctions et leurs tableaux de variation :

Corollaire 5.6.4. *Sens de variation*

i) *La fonction* ch*, définie sur $\mathbb{R}$, est paire. Elle est croissante sur $[0, +\infty[$. Elle vaut 1 en $x = 0$ et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{ch } x = +\infty$.*

ii) *La fonction* sh*, définie sur $\mathbb{R}$, est impaire. Elle est croissante sur $[0, +\infty[$. Elle vaut 0 en $x = 0$ et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{sh } x = +\infty$.*

sh

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ch x		$+$		$+$	
sh x					$+\infty$
		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
	$-\infty$				

ch

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh x		$-$	0	$+$	
ch x	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$	1	$\nearrow$	

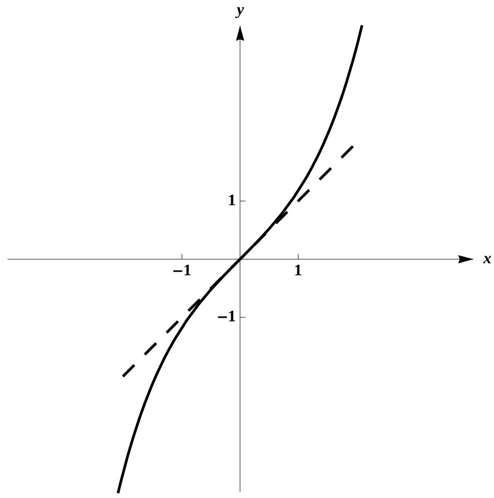


Figure 5.7 – Fonctions sinus hyperbolique

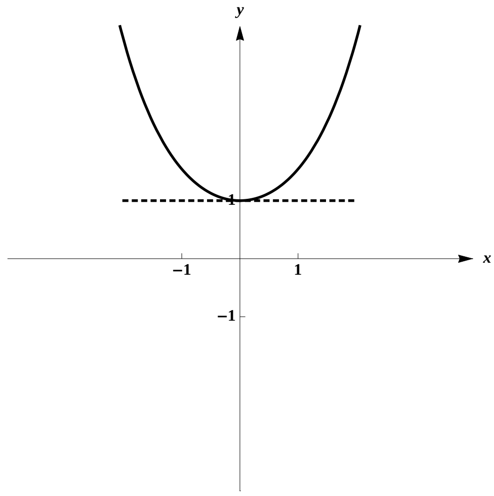


Figure 5.8 – Fonctions cosinus hyperbolique

Propriété 5.6.5. *Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\text{ch}^2\ x - \text{sh}^2\ x = 1$$

Démonstration. On développe l'expression :

$$\text{ch}^2\ x - \text{sh}^2\ x = (\text{ch}\ x + \text{sh}\ x)(\text{ch}\ x - \text{sh}\ x) = e^x e^{-x} = 1$$

□

Définition 5.6.6. *Tangente hyperbolique*
Etant donné un réel x, on appelle tangente hyperbolique de x le réel, noté $\tanh x$, *tel que*

$$\tanh x = \frac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x}$$

Proposition 5.6.7. *La fonction* tanh *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\tanh' x = \frac{1}{\text{ch}^2\ x} = 1 - \tanh^2 x$$

Proposition 5.6.8. *Sens de variation*
La fonction tanh, *définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, elle est croissante sur* $[0, +\infty[$. *Elle vaut 0 en $x = 0$ et vérifie* $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh x = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$.

Cette proposition est une conséquence immédiate des propriété de la fonction exp. On en déduit le tableau de variation de la fonction tanh :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{\text{ch}^2\ x}$		$+$		$+$	
$\tanh x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

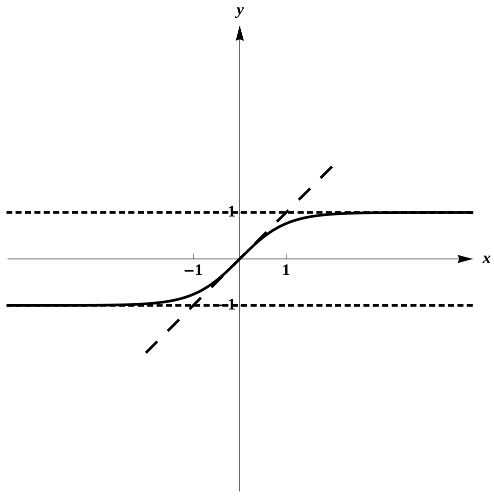


Figure 5.9 – Fonction tangente hyperbolique

Annexe 5.6.9. *Formulaire hyperbolique*

Formules d'addition :

$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b$	$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b$
$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a$	$\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a$
$\tanh\,(a+b) = \dfrac{\tanh\ a + \tanh\ b}{1 + \tanh\ a \tanh\ b}$	$\tanh\,(a-b) = \dfrac{\tanh\ a - \tanh\ b}{1 - \tanh\ a \tanh\ b}$

De ces formules, on déduit aisément les formules de duplication :

$\mathrm{ch}\,(2a) = \mathrm{ch}^2\ a + \mathrm{sh}^2\ a$, $\mathrm{sh}\,(2a) = 2\,\mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ a$ et $\tanh\,(2a) = \dfrac{2\tanh\ a}{1+\tanh^2\ a}$.

Et les formules de linéarisation :

$\mathrm{ch}^2\ x = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2x)+1}{2}$, $\mathrm{sh}^2\ x = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2x)-1}{2}$, $\tanh^2\ x = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2x)-1}{\mathrm{ch}\ (2x)-1}$

Formules de factorisation :

$\mathrm{ch}\ p - \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{sh}\ \dfrac{p-q}{2}$	$\mathrm{ch}\ p + \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{ch}\ \dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\ \dfrac{p-q}{2}$
$\mathrm{sh}\ p - \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{ch}\ \dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{sh}\ \dfrac{p-q}{2}$	$\mathrm{sh}\ p + \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \dfrac{p+q}{2}\,\mathrm{ch}\ \dfrac{p-q}{2}$

Formules de changement de variables, en posant $t = \tanh\ \dfrac{a}{2}$:

$\mathrm{ch}\ a = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$	$\mathrm{sh}\ a = \dfrac{2t}{1-t^2}$	$\tanh\ a = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Chapitre 6

Fonctions réciproques

6.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 6.1.1. *Soient X et Y deux ensembles. Une fonction $f : X \to Y$ est injective si pour tout couple d'éléments x, x' de X :*

$$f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Définition 6.1.2. *Soient X et Y deux ensembles. Une fonction $f : X \to Y$ est surjective si pour tout $y \in Y$, il existe un $x \in X$ tel que*

$$y = f(x)$$

Définition 6.1.3. *Soient X et Y deux ensembles. Une fonction $f : X \to Y$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective,c'est-à-dire que pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que*

$$y = f(x)$$

Définition 6.1.4. *Soient X et Y deux ensembles et soit $f : X \to Y$ une fonction bijective. Pour chaque $y \in Y$, l'unique élément $x \in X$ tel que $y = f(x)$ est noté $f^{-1}(y)$. La fonction $f^{-1} : Y \to X$ est appelée fonction réciproque de f*

Le résultat suivant est une reformulation des définitions :

Proposition 6.1.5. *Soient X et Y deux ensembles et soit $f : X \to Y$ une fonction bijective et $f^{-1} : Y \to X$ sa fonction réciproque.*
Alors :

$$f \circ f^{-1} = Id_Y \qquad \text{et} \qquad f^{-1} \circ f = Id_X$$

6.2 Réciproques des fonctions monotones, continues, dérivables

Proposition 6.2.1.

i) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.*
ii) *Une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ injective est strictement monotone.*

Démonstration. *i)* Soit f une fonction strictement monotone et soient x_1 et x_2 dans I tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$ et si $x_1 > x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$, ces deux cas sont donc impossibles et par suite $x_1 = x_2$.

La fonction f est donc bien injective.

ii) Soit f une fonction continue et injective. Procédons par l'absurde en supposant que f n'est pas strictement monotone. Alors, il existe $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ tels que $f(x_1) \geq f(x_2)$ et $f(y_1) \leq f(y_2)$.

On pose alors $g(t) = f\left(tx_1 + (1-t)y_1\right) - f\left(tx_2 + (1-t)y_2\right)$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$ puisque f l'est par hypothèse et de plus $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, 3.3.3, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 0$.

On en déduit que $f\left(t_0x_1 + (1-t_0)y_1\right) = f\left(t_0x_2 + (1-t_0)y_2\right)$ alors que, par construction, $t_0x_1 + (1-t_0)y_1 < t_0x_2 + (1-t_0)y_2$.

Ceci montre que f n'est pas injective. □

Remarque. La propriété *ii)* de la proposition 6.2.1 est fausse si on ne suppose pas que la fonction f est continue.

En effet, on peut considérer la fonction qui vaut x sur $[0, 1]$ et $-x$ sur $]1, 2]$. Cette fonction est injective mais n'est pas monotone sur $[0, 2]$.

Corollaire 6.2.2. *Une fonction continue $f : I \to f(I)$ est bijective si et seulement si elle est strictement monotone.*

Démonstration. L'injectivité est une conséquence de la proposition 6.2.1 et la surjectivité est automatique puisqu'on a considéré que la fonction f est à valeurs dans $f(I)$. □

Théorème 6.2.3. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I_1 \to I_2$ une fonction bijective.*
Si f est croissante (respectivement décroissante) sur I_1, alors f^{-1} est croissante (respectivement décroissante) sur I_2.

Démonstration. Supposons f croissante et soit y_1 et y_2 dans I_2 tels que $y_1 < y_2$. Par la bijectivité de f, il existe x_1 et x_2 dans I_1 tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Si $x_1 > x_2$, alors par la croissance de f, $f(x_1) \geq f(x_2)$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $x_1 \leq x_2$, c'est-à-dire $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$ et la fonction f^{-1} est bien croissante. □

Théorème 6.2.4. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I_1 \to I_2$ une fonction bijective.*
Si f est continue sur I_1, alors f^{-1} est continue sur I_2.

Démonstration. Supposons que f est continue. Comme elle est bijective, d'après le corollaire 6.2.2, elle est strictement monotone, par exemple strictement croissante. Mais alors, f^{-1} est aussi croissante d'après le théorème 6.2.3 et donc aussi strictement croissante puisqu'elle est injective.

Montrons la continuité de f^{-1} en un point $y_0 \in I_2$: soit $\varepsilon > 0$ donné et $x_0 = f^{-1}(y_0)$.
On pose $\eta = \inf\{f(x_0+\varepsilon) - y_0, y_0 - f(x_0 - \varepsilon)\}$.
Si $|y - y_0| \leq \eta$, alors

$$f(x_0 - \varepsilon) \leq y \leq f(x_0 + \epsilon)$$

et par la croissance de f^{-1},

$$x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon$$

En remplaçant x_0 par $f^{-1}(y_0)$, on trouve qu'alors $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que pour tout voisinage $V =]f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0) + \varepsilon[$ de $f^{-1}(y_0)$, il existe un voisinage $W =]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ de y_0 tel que si $y \in W$, alors $f^{-1}(y) \in V$.

Ceci prouve la continuité de f^{-1} en y_0 et donc sur I_2 puisque c'est vrai pour tout $y_0 \in I_2$. □

Théorème 6.2.5. *Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I_1 \to I_2$ une fonction continue et bijective.*
Si f est dérivable en un point $x_0 \in I_1$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Démonstration. Supposons que f soit dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ et calculons le taux d'accroissement de f^{-1} en $y_0 = f(x_0)$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f \circ f^{-1}(y) - f(x_0)} = \frac{1}{\Delta\left(f^{-1}(y)\right)}$$

où $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Comme f est continue, f^{-1} est aussi continue par le théorème 6.2.4 et donc si $y \to y_0$, $f^{-1}(y) \to x_0$. Par suite $\Delta(x) \to f'(x_0) \neq 0$ et on a bien

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

Application 6.2.6. Graphes des fonctions réciproques
Soit f une fonction et f^{-1} sa fonction réciproque. Si l'on écrit

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

on voit que pour dessiner le graphe de f^{-1}, on doit échanger les axes de coordonnées. Donc, dans un même repère, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première diagonale.

6.3 Réciproques des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives sur $\mathbb{R}$ et n'ont donc pas de fonctions réciproques. En revanche, si on les restrient à un intervalle où elles sont bijectives, c'est-à-dire $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ pour le sinus et $[0, \pi]$ pour le cosinus, on peut effectivement définir les fonctions réciproques de ces restrictions. Par abus de langage, on parle tout de même de fonctions réciproques des fonctions trigonométriques dans ce cadre.

Définition 6.3.1. *Fonction arcsinus.*
La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est strictement croissante donc bijective de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1, +1]$*. Sa fonction réciproque, définie sur* $[-1, 1]$*, à valeurs dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, est appelée fonction arcsinus et notée* arcsin*.*

Proposition 6.3.2. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1, +1[$*, elle est impaire et croissante et pour tout* $x \in]-1, +1[$ *:*

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La fonction arcsin *est donc de classe* C^∞ *sur* $]-1, +1[$*.*

Démonstration. On peut appliquer le théorème 6.2.4 sur l'intervalle $]-1, 1[$ mais pas en -1 ni en $+1$, puisque la dérivée de la fonction sin s'annule en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Sur $]-1, 1[$, on a :

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ce résultat prouve que la fonction arcsin est de classe C^∞ sur $]-1, +1[$ puisque sa dérivée l'est. □

Définition 6.3.3. *Fonction arccosinus.*
La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ *est strictement décroissante donc bijective de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, +1]$*. Sa fonction réciproque, définie sur* $[-1, 1]$*, à valeurs dans* $[0, \pi]$ *est appelée fonction arccosinus et notée* arccos*.*

Proposition 6.3.4. *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1, +1[$*, elle est décroissante et pour tout* $x \in]-1, +1[$ *:*

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La fonction arccos *est donc de classe* C^∞ *sur* $]-1, +1[$*.*

Démonstration. Comme pour la fonction sin, on peut appliquer le théorème 6.2.4 sur l'intervalle $]-1,1[$ mais pas en -1 ni en $+1$, puisque la dérivée de la fonction cos s'annule en 0 et π.

Sur $]-1,1[$, on a :

$$\arccos' x = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ce résultat prouve également que la fonction arccos est de classe C^∞ sur $]-1,+1[$ puisque sa dérivée l'est. □

Les tableaux de variation de ces deux fonctions sont donc :

arcsin

x	-1		0		1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|\|$	$+$	1	$+$	$\|\|$
arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

arccos

x	-1		0		1
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|\|$	$-$	-1	$-$	$\|\|$
arccos x	π	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

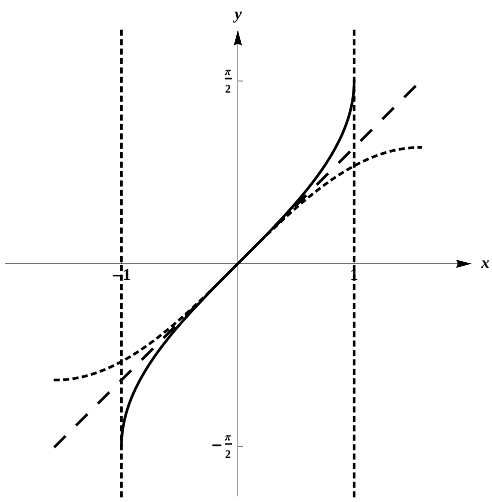


FIGURE 6.1 – Fonctions arcsinus

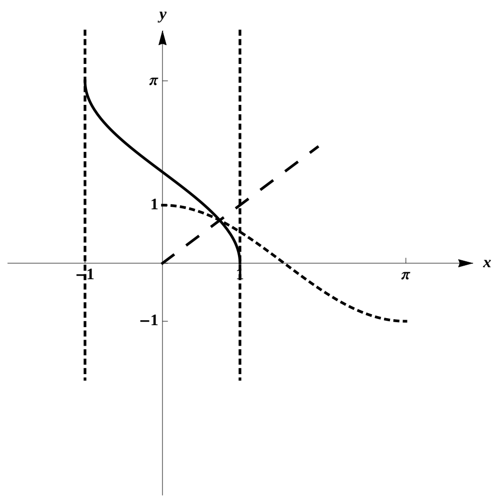


FIGURE 6.2 – Fonctions arcosinus

Définition 6.3.5. *Fonction arctangente*
La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *est strictement croissante donc bijective de* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *dans* $]-\infty,+\infty[$. *Sa fonction réciproque est appelée fonction arctangente et notée* arctan.

Proposition 6.3.6. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $]-\infty,+\infty[$, *elle est impaire et croissante et pour tout* $x\in]-\infty,+\infty[$ *:*

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

La fonction arctan *est donc de classe* C^∞ *sur* $]-\infty,+\infty[$.

Démonstration. On applique le théorème 6.2.4 sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$:

$$\arctan' x = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Ce résultat prouve également que la fonction arctan est de classe C^∞ sur $]-\infty,+\infty[$ puisque sa dérivée l'est. ☐

Le tableau de variation de la fonction arctan est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{1+x^2}$		$+$	1	$+$	
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$

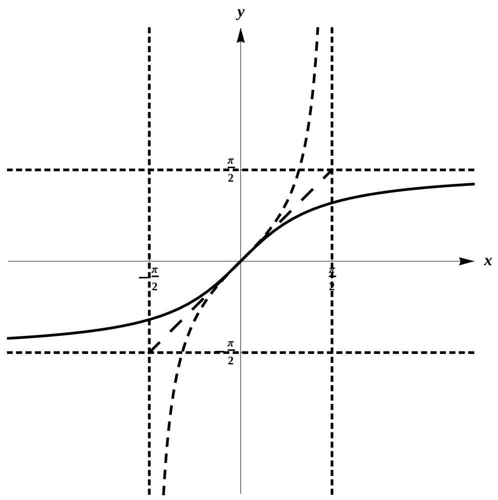


FIGURE 6.3 – Fonctions tangente et arctangente

6.4 Réciproques des fonctions hyperboliques

La fonction argsh est bijective sur $\mathbb{R}$ et donc admet une fonction réciproque.

En revanche, la fonction argch n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$. Pour pouvoir définir une fonction réciproque, il faut la restreindre à l'intervalle $[0,+\infty[$ où elle est bijective. Comme pour les fonctions trigonométriques, par abus de langage, on parle aussi de réciproque de la fonction ch dans ce cadre.

Les résultats et les démonstrations de cette section sont analogues à ceux de la section précédente et ils ne seront pas tous détaillés.

Définition 6.4.1. *La fonction argument sinus hyperbolique,* argsh*, est la réciproque de la fonction* sh*.*

Proposition 6.4.2. *La fonction* argsh *est dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Elle est croissante et*

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh} x = +\infty$$

Sa dérivée vaut

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

C'est donc une fonction de classe C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Définition 6.4.3. *La fonction argument cosinus hyperbolique,* argch *est la réciproque de la restriction de la fonction* ch *à l'intervalle* $[0,+\infty[$*.*

Proposition 6.4.4. *La fonction* argch *est dérivable de* $]1,+\infty[$ *dans* $[0,+\infty[$ *mais pas en* 1 *car la dérivée de la fonction* ch *est nulle en 0. Elle est croissante et*

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argch} x = +\infty$$

Sa dérivée su r $]1,+\infty[$ *vaut*

$$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

C'est donc une fonction de classe C^∞ *de* $]1,+\infty[$ *dans* $[0,+\infty[$*.*

Les tableaux de variation de ces deux fonctions sont donc :

argsh

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	+	1	+
$\operatorname{argsh} x$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

argch

x	1	$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\|\|$	+
$\operatorname{argch} x$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Définition 6.4.5. *La fonction argument tangente hyperbolique,* argtanh*, est la réciproque de la fonction* tanh*.*

Proposition 6.4.6. *La fonction* argtanh *est dérivable de* $]-1,+1[$ *dans* $\mathbb{R}$*. Elle est impaire, croissante et* $\lim\limits_{x\to+1} \operatorname{argtanh} x = +\infty$*. Sa dérivée vaut*

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

C'est donc une fonction de classe C^∞ *de* $]-1,+1[$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

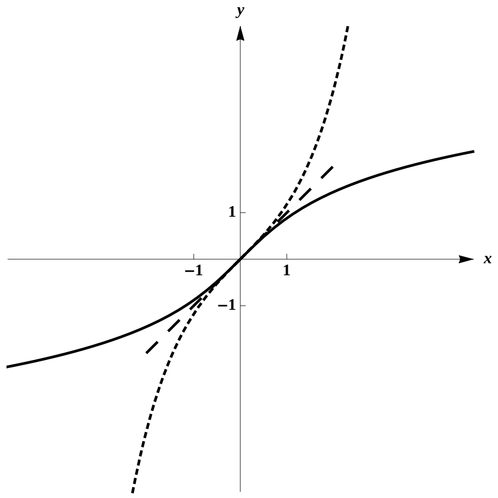


Figure 6.4 – Fonctions argument sinus hyperbolique

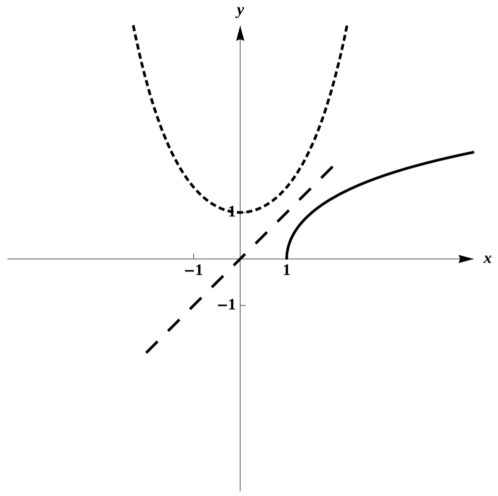


Figure 6.5 – Fonctions argument cosinus hyperbolique

x	-1 $\qquad$ 0 $\qquad$ $+1$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$+$ $\quad$ 1 $\quad$ $+$
$\operatorname{argtanh} x$	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

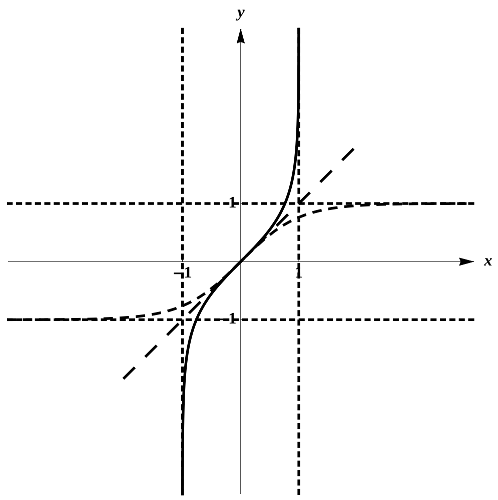


Figure 6.6 – Fonctions tangente hyperbolique et arctangente hyperbolique

Chapitre 7

Formules de Taylor, Développements limités

7.1 Formules de Taylor

Notations 7.1.1. *Soit* $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite finie de nombres. La somme ordonnée de ces* n *nombres est dénotée par :*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Théorème 7.1.2. *Formule de Taylor-Lagrange*
Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^{n+1} *sur* $[a, b]$*. Alors, il existe* $c \in]a, b[$ *tel que :*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Remarque. Dans le cas $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis, 4.4.2 : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Démonstration. Soit A le réel défini par

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

La preuve repose sur le thórème de Rolle, 4.4.1, appliqué à la fonction

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

qui vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Or

$$\varphi'(x) = -f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} A$$

Les termes des deux sommes se simplifient deux à deux, et il reste :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}(-f^{(n+1)}(x) + A) = 0$$

On a donc bien $A = f^{(n+1)}(c)$, ce qui démontre la formule de Taylor-Lagrange. $\square$

Théorème 7.1.3. *Formule de Taylor-Young*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n-fois dérivable dans un voisinage de x_0. Alors, il existe une fonction ε, qui tend vers 0 en 0 et telle que pour x dans un voisinage de x_0 on ait :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin d'un lemme :

Lemme 7.1.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n-fois dérivable dans un voisinage de x_0 telle que $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$. Alors :*

$$\varepsilon(x-x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} \to 0 \text{ quand } x \to x_0$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n :

Pour $n = 1$, la définition de la dérivée de f en x_0 montre bien que la fonction $\varepsilon(x-x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand $x \to x_0$.

Supposons que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$ et soit f une fonction n-fois dérivable ayant toutes ses dérivées nulles jusqu'à l'ordre n en x_0. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction f' qui est $(n-1)$-fois dérivable en x_0 et dont toutes les dérivées sont nulles jusqu'à l'ordre $n-1$ en x_0 et on obtient :

$$\frac{f'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} \to 0 \text{ quand } x \to x_0$$

Appliquons la formule des accroissements finis, 4.4.2 : il existe c entre $x-x_0$ et $x+x_0$ tel que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$. Donc

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} = f'(c)\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}} = \frac{f'(c)}{(c-x_0)^{n-1}} \frac{(c-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}}$$

Or puisque c est entre $x-x_0$ et $x+x_0$, on a $\left|\dfrac{(c-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}}\right| \leq 1$ et donc

$$0 \leq \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{(c-x_0)^{n-1}}\right|$$

De plus $c \to x_0$ quand $x \to x_0$ et $\dfrac{f'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} \to 0$ quand $x \to x_0$. Par composition des limites, on en déduit que $\dfrac{f'(c)}{(c-x_0)^{n-1}} \to 0$ quand $x \to x_0$ et par le théorème des gendarmes, on obtient finalement

$$\varepsilon(x-x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} \to 0 \text{ quand } x \to x_0$$

□

On peut alors démontrer la formule de Taylor-Young, théorème 7.1.3 :

Démonstration. On utilise la fonction

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

La fonction g vérifie l'hypothèse du lemme 7.1.4 car

$$g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

On peut donc appliquer le lemme à la fonction g, ce qui implique bien que

$$\varepsilon(x-x_0) = \frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f(x)-f(x_0)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)}{(x-x_0)^n}$$

tend vers 0 quand $x \to x_0$. □

Remarque. Sous les hypothèses de la formule de Taylor-Lagrange, on peut prendre

$$\varepsilon(x-x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Remarque. La fonction $(x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$ est négligeable devant $(x-x_0)^n$ lorsque $x-x_0$ tend vers 0. C'est donc un $o\left((x-x_0)^n\right)$.

7.2 Développements limités

Définition 7.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des nombres réels $c_0, c_1, \cdots, c_n$ et une fonction ε, qui tend vers 0 en 0, tels que pour tout x dans un voisinage de x_0 on ait :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

Remarque. Avec les notations de Landau, 2.5.4, le développement limité d'ordre n d'une fonction f au voisinage de x_0 s'écrit aussi :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Définition 7.2.2. *Le polynôme* $\sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$ *s'appelle la partie principale du développement limité et la fonction* $o\left((x - x_0)^n\right)$ *s'appelle le reste du développement limité.*

Théorème 7.2.3. *Le développement limité d'une fonction f à l'ordre n au voisinage d'un point donné, s'il existe, est unique.*

Démonstration. Supposons qu'une fonction f admette 2 développements limités au voisinage d'un point x_0, soit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} d_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

On a donc : $\sum_{k=0}^{n} (c_k - d_k)(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) = 0$.
En prenant $x = x_0$, on trouve $c_0 = d_0$.

On divise ensuite cette égalité par $(x - x_0)$ et on prend à nouveau $x = x_0$, ce qui donne $c_1 = d_1$.

On itère ce raisonnement jusqu'à l'ordre n, ce qui donne $c_n = d_n$.

Les deux développements sont donc égaux et on a bien l'unicité du développement limité d'une fonction donnée. □

Théorème 7.2.4. *Les fonctions qui vérifient les hypothèses de la formule de Taylor-Young à l'ordre n en un point x_0, admettent un développement limité à l'ordre n en ce point x_0.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions. Les coefficients du développement limité sont dans ce cas $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pour $k = 0, 1, ...n$. □

La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple la fonction $x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, soit $x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} = o(x^2)$ alors que cette fonction n'est pas dérivable en 0 et n'admet donc pas de développement de Taylor en ce point.

Proposition 7.2.5. *Intégration des développements limités*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 de la forme :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

alors f admet le développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de x_0 défini par :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + o\left((x - x_0)^{n+1}\right)$$

Démonstration. En effet, notons :

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$$

P et Q sont des polynômes qui vérifient $P(x_0) = f(x_0)$ et $P' = Q$.
Il s'agit de montrer :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0$$

Or, la fonction $\varphi(x) = f(x) - P(x)$ est dérivable sur I et vérifie :

$$\varphi'(x) = f'(x) - P'(x) = f'(x) - Q(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

On peut appliquer le théorème des accroissements finis, 4.4.2 :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |f(x) - P(x)| \leq |(x - x_0) o\left((x - x_0)^n\right)|$$

soit $f(x) - P(x) = o\left((x - x_0)^{n+1}\right)$. □

Remarque. Attention, on ne peut pas dériver les développements limités !

Par exemple $x = o(1)$ alors que $1 \neq o(0)$ en 0.

7.3 Développements limités des fonctions usuelles

Les développements limités qui suivent sont tous au voisinage de 0. Les fonctions usuelles qui sont listées ci-dessous sont toutes de classe C^∞ au voisinage de 0. On peut donc leur appliquer la formule de Taylor-Young, 7.1.3 à tout ordre pour trouver leurs développements limités.

On peut également faire des changements de variables, par exemple, remplacer x par $-x$ ou par x^2.

Pour les fonctions qui ont des dérivées dont on connait le développement limité, on peut aussi utiliser le théorème d'intégration des développements limités, 7.2.5

Par la formule de Taylor-Young, on trouve :

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

En changeant x et $-x$ puis en x^2, on trouve :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

En intégrant les développements limités de $\frac{1}{1+x}$ et de $\frac{1}{1-x}$, on trouve :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1})$$

A nouveau par la formule de Taylor-Young, on trouve :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

et en particulier pour $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^k + o(x^n)$$

Et en remplaçant x par $-x$ et puis par x^2, on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n})$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n})$$

En utilisant les formules : ch $x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et sh $x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, on trouve :

$$\text{ch } x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{sh } x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

En intégrant les développements limités de $\dfrac{1}{1+x^2}$ et de $\dfrac{1}{1-x^2}$, on trouve :

$$\text{arctan} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$
$$\text{argtanh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

En intégrant les développements limités de $\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, on trouve :

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$
$$\text{argsh}\, x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Pour la fonction arccos, on remarque que $\arccos' x + \arcsin' x = 0$.
La fonction arccos +arcsin est donc constante et comme $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arcsin 0 = 0$, on a $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$. D'où le développement limité de la fonction arccos :

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

En revanche, la fonction argch nétant pas définie dans un voisinage de 0, elle n'a évidemment pas de développement limité en 0.

Application 7.3.1.
1) Les développements limités servent à trouver des équivalents et ensuite calculer des limites. En particulier, une fonction est équivalente au premier terme de son développement limité s'il est non nul.
2) On peut faire des opérations algébriques sur les développements limités, somme produit, composition. Lors de ces opérations, il faut faire attention à ne pas conserver les termes d'ordre supérieur à l'ordre du reste. Des exemples de calculs de développements limités qui utilisent ces opérations sont donnés en exercice.

Exemple 7.3.2. *La limite quand* $x \to 0$ *de la fonction :* $\dfrac{\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{\sin^4 x}$ *vaut* $\dfrac{1}{4!}$.

En effet, on écrit le développement limité de la fonction cos à l'ordre 3 au voisinage de 0 : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$, d'où $\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$.

On a donc :

$$\frac{\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{\sin^4 x} = \left(\frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)\frac{1}{\sin^4 x} \sim_{x\to 0} \frac{x^4}{4!}\frac{1}{\sin^4 x} \sim_{x\to 0} \frac{x^4}{4!}\frac{1}{x^4} = \frac{1}{4!}$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{\sin^4 x} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Cependant, il faut faire attention en utilisant les équivalents car les sommes et les compositions de fonctions ne sont pas toujours équivalentes aux sommes et compositions de leurs équivalents. En cas de doute, il faut revenir aux développements limités. En particulier, la fonction nulle n'est jamais un équivalent !

Exemple 7.3.3.

i) *La fonction* $\sin x$ *est équivalente à* x *en 0 et la fonction* $\sin x - x$ *est équivalente à* $\dfrac{x^3}{3!}$ *en 0.*

ii) *On a l'équivalence* $x + 1 \sim x$ *quand* $x \to +\infty$ *alors que* e^{x+1} *n'est pas équivalente à* e^x *en* $+\infty$.

Chapitre 8

Equations différentielles linéaires du 1er ordre

8.1 Equations différentielles homogènes

Définition 8.1.1. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre est une équation de la forme :*

$$y'(x) = a(x)y(x), \text{ ou plus simplement } y' = a(x)y$$

où y est une fonction inconnue.

Théorème 8.1.2. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = a(x)y$ sont données par :*

$$y(x) = ke^{A(x)}, \; k \in \mathbb{R}$$

où la fonction A est une primitive de la fonction a, c'est-à dire qui vérifie $A' = a$. L'ensemble des solutions forme donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{R}$ donné. La fonction $y(x) = ke^{A(x)}$ est dérivable, de dérivée $y'(x) = ka(x)e^{A(x)} = a(x)y(x)$. Cette fonction est donc bien solution de l'équation différentielle homogène $y' = a(x)y$.

Réciproquement, si y est une solution non identiquement nulle, soit $J \subset I$ un intervalle sur lequel elle ne s'annule pas.
Sur cet intervalle, on peut écrire : $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$ et donc en intégrant

$$\ln \; |y(x)| = A(x) + c$$

où c est une constante, soit encore

$$|y(x)| = e^c e^{A(x)}$$

où la constante e^c est strictement positive.

On remarque que les fonctions y telles que $|y(x)| = e^c e^{A(x)}$ ne s'annulent pas, elles sont soit positives, soit négatives sur tout l'intervalle I. Les solutions sont donc $y(x) = ke^{A(x)}$, avec $k = +e^c$ ou $k = -e^c$. On voit également que la fonction nulle est solution de l'équation.

Donc finalement l'ensemble des solutions est bien de la forme $y(x) = ke^{A(x)},\ k \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions est bien un espace vectoriel de dimension 1 car toutes les solutions sont proportionnelles à la fonction $e^{A(x)}$. □

Définition 8.1.3. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est une équation de la forme :*

$$y'(x) = a(x)y(x), \text{ et } y(x_0) = y_0$$

Théorème 8.1.4. *Soit a une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre avec condition initiale $y' = a(x)y$, et $y(x_0) = y_0$ admet une solution unique :*

$$y(x) = y_0 e^{-A(x_0)} e^{A(x)}$$

où la fonction A est une primitive de la fonction a, c'est-à dire qui vérifie $A' = a$.

Démonstration. La condition initiale $y(x_0) = y_0$ est vérifiée si et seulement si la solution $y(x) = ke^{A(x)}$ est telle que $y(x_0) = ke^{A(x_0)} = y_0$ c'est-à-dire si $k = y_0 e^{-A(x_0)}$. □

Exemple 8.1.5. *L'équation différentielle $y' = 2xy$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet la solution $y = e^{x^2}$.*

8.2 Equation différentielles avec second membre

Définition 8.2.1. *Soit a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre est une équation de la forme :*

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \text{ ou plus simplement } y' = a(x)y + b(x)$$

où y est une fonction inconnue.
L'équation $y' = a(x)y$ est appelée l'équation homogène associée et la fonction b s'appelle le second membre.

Théorème 8.2.2. *Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$, alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène associée.*

Démonstration. Soient y_1 et y_2 deux solution de l'équation différentielle avec second membre $y' = a(x)y + b(x)$.

Alors par linéarité de la dérivation, 4.1.6, on a :

$$(y_1 - y_2)' = y_1' - y_2' = a(x)y_1 + b(x) - a(x)y_2 - b(x) = a(x)(y_1 - y_2)$$

La fonction $y_1 - y_2$ est donc bien solution de l'équation homogène associée. □

Corollaire 8.2.3. *Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre $y' = a(x)y + b(x)$, est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.*

Démonstration. En effet, soit y_0 une solution fixée de l'équation différentielle avec second membre $y' = a(x)y + b(x)$. Si y est une solution quelconque de cette équation différentielle, alors d'après le théorème 8.2.2, $y - y_0$ est solution de l'équation homogène associée.

On peut donc bien écrire $y = (y - y_0) + y_0$ et y apparait comme la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation homogène associée. □

Grâce à ce corollaire, la résolution complète d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre revient à rechercher une solution particulière de cette équation.

Quand le second membre est une fonction simple, on verra ci-dessous des techniques pour effectuer cette recherche.

Quand le second membre est plus complexe, on a souvent avantage à découper le problème en plusieurs problèmes plus simples, à l'aide du résultat suivant :

Proposition 8.2.4. *Soit $y' = a(x)y + b_1(x)$ et $y' = a(x)y + b_2(x)$ deux équations différentielles linéaires du premier ordre ayant le même coefficient a et deux second membres b_1 et b_2.*
Alors la solution générale de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b_1(x) + b_2(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b_1(x)$ et de la solution générale de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b_2(x)$

Démonstration. Soient y_1 une solution de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b_1(x)$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b_2(x)$. Alors,

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = a(x)y_1 + b_1(x) + a(x)y_2 + b_2(x) = a(x)(y_1 + y_2) + b_1(x) + b_2(x)$$

et donc $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $y' = a(x)y + b_1(x) + b_2(x)$.

D'après le corollaire 8.2.3, toute solution de l'équation $y' = a(x)y + b_1(x) + b_2(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de cette équation, qui peut donc s'écrire comme la somme d'une solution particulière de l'équation $y' = a(x)y + b_1(x)$ et d'une solution particulière de l'équation $y' = a(x)y + b_2(x)$. $\square$

Exemple 8.2.5. *La solution générale de l'équation $y' = y + 2x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$ est*

$$y = ke^x - 2x - 2 - \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

En effet, la solution générale de l'équation homogène associée est $y = ke^x$. On vérifie que la fonction $-2x - 2$ est une solution particulière de l'équation $y' = y + 2x$ et la fonction $-\dfrac{\sin x + \cos x}{2}$ est une solution particulière de l'équation $y' = y + \sin x$.

Définition 8.2.6. *Dans le cas particulier où la fonction a est constante, on dit que l'équation différentielle est à coefficients constants.*

Dans le cas des équations différentielles à coefficients constants, pour certains second membres, on peut donner des méthodes de recherche de solutions particulières :

Cas particulier 8.2.7. *Equations à coefficient constant a*

i) *avec second membre de la forme : $P(x)e^x$,*
ii) *avec second membre de la forme : $\sin x \; e^x, \; \cos x \; e^x$,*
iii) *avec second membre de la forme : $P(x)\sin x, P(x)\cos x$.*

i) Dans ce cas, on recherche des solutions de la forme $Q(x)e^x$, où le degré du polynôme Q est égal à celui de P si $a \neq 1$ et égal à $\deg P + 1$ si $a = 1$.

En effet, si $y = Q(x)e^x$, on a

$$y' - ay = (Q'(x) + (1-a)Q(x))\, e^x = P(x)e^x$$

et on peut bien calculer les coefficients de Q en fonction de ceux de P avec les conditions de degré ci dessus.

ii) Dans le cas du second membre $\cos x \; e^x$, on recherche des solutions de la forme $(\alpha \sin x + \beta \cos x)\, e^x$.

En effet, si $y = (\alpha \sin x + \beta \cos x)\, e^x$, on a

$$y' - ay = (\cos x\,[\alpha + \beta(1-a)] + \sin x\,[-\beta + \alpha(1-a)])\, e^x = \cos x \; e^x$$

Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{array}{c} \alpha + \beta(1-a) = 1 \\ -\beta + \alpha(1-a) = 0 \end{array}$$

qui a toujours une solution.
Le cas où le second membre est $\sin x \; e^x$ se traite de la même façon.

iii) Dans ce cas, on cherche des solutions de la forme $y = Q(x)\cos x + R(x)\sin x$, où les degrés des polynômes Q et R sont égaux au degré de P. La démonstration se fait comme pour le cas *i)* en remplaąnt e^x par e^{ix}.

La partie réelle de la solution trouvée correspond à la solution particulière avec le second membre $P(x)\cos x$ et la partie imaginaire de la solution à celle avec le second membre $P(x)\sin x$.

Ces calculs s'adaptent aisément au cas où le second membre est de la forme $P(x)e^{\lambda x}$, $\sin xe^{\lambda x}$, $\cos xe^{\lambda x}$, $\cdots$, où λ est un réel quelconque.

Exemple 8.2.8. *Solutions particulières.*

i) Une solution particulière de l'équation différentielle $y' = 3y + e^{3x}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est* $y = xe^{3x}$.

ii) Une solution particulière de l'équation différentielle $y' = y + e^{3x}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est* $y = \dfrac{1}{2}e^{3x}$.

iii) Une solution particulière de l'équation différentielle $y' = y + \sin x\, e^{3x}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est* $y = \dfrac{1}{5}(2\sin x - \cos x)e^{3x}$.

i) On cherche une solution de la forme $y = (\lambda x + \mu)e^{3x}$.
Dans ce cas, $y' - 3y = \lambda e^{3x} = e^{3x}$. Donc la fonction $y = xe^{3x}$ convient.

ii) On cherche une solution de la forme $y = \lambda e^{3x}$.
Dans ce cas, $y' - 3y = 2\lambda e^{3x} = e^{3x}$. Donc la fonction $y = \dfrac{1}{2}e^{3x}$ convient.

iii) On cherche une solution de la forme $y = (\alpha\sin x + \beta\cos x)e^{3x}$.
Dans ce cas, $y' - y = (\cos x\,[\alpha + 2\beta] + \sin x\,[-\beta + 2\alpha])\,e^{3x} = \sin xe^{3x}$.

Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{gathered} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\beta + 2\alpha = 1 \end{gathered}$$

Les constantes $\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\beta = -\dfrac{1}{5}$ conviennent.

Dans le cas général, il existe une méthode systématique pour trouver une solution particulière d'une équation avec second membre, c'est la méthode de variation de la constante :

Proposition 8.2.9. *Méthode de variation de la constante*
Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$, sous la forme $y = \lambda(x)e^{A(x)}$, où la fonction A vérifie $A' = a$. Toute fonction λ qui vérifie $\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}$ convient.

Démonstration. La fonction $y = \lambda(x)e^{A(x)}$, avec $A' = a$ vérifie

$$y' - a(x)y = \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)} - \lambda(x)a(x)e^{A(x)} = \lambda'(x)e^{A(x)}$$

La fonction y est solution de l'équation différentielle $y' = a(x)y+b(x)$ si et seulement si $\lambda'(x)e^{A(x)} = b(x)$, c'est-à-dire $\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}$. □

Exemple 8.2.10. *La solution générale de l'équation* $xy' - y = x^2e^x$ *sur* $]0, +\infty[$ *est* $y = \lambda x + xe^x$.

En effet, l'équation homogène associée est $xy' = y$ qui admet comme solution générale $y = \lambda x$. On cherche une solution particulière de l'équation $xy' - y = x^2e^x$ de la forme $y = x\lambda(x)$.
Alors, la fonction $\lambda(x)$ vérifie $x\lambda(x) + x^2\lambda'(x) - x\lambda(x) = x^2e^x$, soit $\lambda'(x) = e^x$.
On en déduit donc que $\lambda(x) = \lambda + e^x$ et donc que la solution générale de l'équation est $y = \lambda x + xe^x$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Chapitre 9

Le corps $\mathbb{C}$ et l'exponentielle complexe

9.1 Définition de $\mathbb{C}$

Définition 9.1.1. *On introduit un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est défini par :*

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

i) *x est appelé partie réelle de z et noté $x = Re\ z$.*
ii) *y est appelé partie imaginaire de z et noté $y = Im\ z$.*
iii) *Si $x = 0$, le nombre complexe $z = iy$ est dit imaginaire pur.*
iv) *Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ s'appelle le conjugué de $z = x + iy$.*

Proposition 9.1.2. *L'ensemble $\mathbb{C}$ peut être muni de deux lois de composition interne, $+$ et $\times$, qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ telles que pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$:*
i) $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
ii) $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$
Muni de ces deux lois de composition interne, $\mathbb{C}$ est un corps commutatif et $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Démonstration. Les axiômes définissant les corps ont été définis au chapitre 1, voir 1.2.6.

L'ensemble $\mathbb{C}$ vérifie ces axiômes avec :

- l'élément nul de l'addition est $0 = 0 + i0$,
- l'opposé de $z = x + iy$ est $-z = -x - iy$,
- l'élément neutre pour la multiplication est le nombre réel 1,
- l'inverse d'un nombre complexe non nul $z = x + iy$ est le nombre complexe

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ car $\mathbb{R}$ s'identifie au sous-ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } Imz = 0\}$$

De plus,il est facile de voir que les lois de $\mathbb{C}$ restreintes à ce sous-ensemble redonnent la structure de corps de $\mathbb{R}$. □

Proposition 9.1.3.
i) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
ii) $z\overline{z} = x^2 + y^2$

Démonstration. i) Avec les notations de la définition 9.1.1 et la définition des opérations sur $\mathbb{C}$ de la proposition 9.1.2, on ecrit :

$$\overline{z+z'} = \overline{x+y+i(y+y')} = x+y-i(y+y') = (x-iy)+(x'-iy') = \overline{z}+\overline{z'}.$$

$$\overline{zz'} = \overline{(xx'-yy')+i(xy'+x'y)} = (xx'-yy')-i(xy'+x'y) = (x-iy)(x'-iy') = \overline{z}\overline{z'}.$$

ii) De la même façon, on calcule :

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2+i(xy-xy) = x^2+y^2.$$ □

Proposition 9.1.4. *L'ensemble des nombres complexes s'identifie au plan euclidien* $\mathbb{R}^2$*, c'est-à-dire muni d'un repère orthonormé* $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$.
i) L'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs.
ii) La multiplication par i correspond à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
iii) La multiplication par $i^2 = -1$ correspond à la rotation d'angle π.
iv) Le passage au complexe conjugué $z \to \bar{z}$ correspond à la symétrie par rapport à l'axe des x.

Démonstration. L'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ consiste à associer à tout nombre complexe $z = x+iy$ le vecteur de coordonnées (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

i) L'addition de deux nombres complexes, $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ est le nombre complexe $x+x'+i(y+y')$ qui s'identifie au vecteur $(x+x', y+y')$ qui est bien la somme des vecteurs (x, y) et (x', y').

ii) La multiplication du nombre complexe $z = x+iy$ par i est le nombre complexe $iz = -y+ix$. Le vecteur associé à $iz = -y+ix$ est $(-y, x)$ qui est bien le transformé du vecteur (x, y) par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

iii) De même, la multiplication du nombre complexe $z = x+iy$ par $i^2 = -1$ est le nombre complexe $-z = -x-iy$. Le vecteur associé à $-z = -x-iy$ est $(-x, -y)$ qui est bien le transformé du vecteur (x, y) par la rotation d'angle π.

iv) Le complexe conjugué du nombre complexe $z = x+iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x-iy$. Le vecteur associé à $\bar{z} = x-iy$ est $(x, -y)$ qui est bien le symétrique du vecteur (x, y) par rapport à l'axe des x. □

Définition 9.1.5. *Forme polaire*

i) *On appelle module ou norme du nombre complexe $z = x + iy$ le nombre*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Ce nombre positif représente la distance du point de coordonnées (x, y) à l'origine dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

ii) *On appelle argument du nombre complexe $z = x + iy \neq 0$ et on note $\theta = \mathrm{Arg} z$, une mesure en radians dans le plan $\mathbb{R}^2$ de l'angle entre l'axe des x et le vecteur de coordonnés (x, y). L'argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π.*

iii) *Le nombre complexe $z = x + iy \neq 0$ s'écrit alors de façon unique :*

$$z = |z|(\cos\,\theta + i\sin\,\theta)$$

Remarque. Grâce à l'écriture des nombres complexes sous forme polaire, on peut voir que la multiplication sur $\mathbb{C}$ correspond dans $\mathbb{R}^2$ à la composition d'une rotation et d'une homothétie.

En effet, en utilisant les formules trigonométriques du chapitre 5 établies en 5.5.6, si $\zeta = \rho(\cos\,\omega + i\sin\,\omega)$ un nombre complexe donné, de module $\rho > 0$ et d'argument ω, la multiplication de $z = |z|(\cos\,\theta + i\sin\,\theta)$ par ζ est le nombre complexe ζz tel que $\zeta z = \rho|z|(\cos\,\omega + i\sin\,\omega)(\cos\,\theta + i\sin\,\theta) = \rho|z|\,(\cos\,(\omega+\theta)) + i\,(\sin\,(\omega+\theta))$.

Le vecteur de coordonnées $(\rho|z|\cos\,(\omega+\theta), \rho|z|\sin\,(\omega+\theta))$ est bien le transformé du vecteur $(|z|\cos\,\theta, |z|\sin\,\theta)$ par l'homothétie de rapport ρ et la rotation d'angle ω.

9.2 Exponentielle complexe

Définition 9.2.1. *Exponentielle complexe*

i) *Pour tout nombre réel θ, on pose :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ii) *Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on pose :*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

où e^x est l'exponentielle réelle classique et e^{iy} est définie au i).

Remarque.

i) Puisque les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$$

ii) En utilisant la forme polaire définie en 9.1.5,

$$|e^z| = e^x \text{ et } \mathrm{Arg}(e^z) = y \pmod{2\pi}$$

Proposition 9.2.2.

i) *Pour tous nombres réels y et y' on a :*

$$e^{iy}e^{iy'} = e^{i(y+y')}$$

ii) *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

iii) *Pour tout nombre complexe z et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$e^{nz} = (e^z)^n$$

iv) *Pour tout nombre complexe z, on a $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.*

Démonstration. i) Cette propriété est une conséquence des formules trigonométriques démontrées au chapitre 5. En effet :

$$e^{iy}e^{iy'} = (\cos y + i \sin y)(\cos y' + i \sin y')$$

$$= (\cos y \cos y' - \sin y \sin y') + i(\cos y \sin y' + \cos y' \sin y)$$

$$= \cos (y + y') + i \sin (y + y') = e^{i(y+y')}$$

ii) Avec la définition 9.2.1, pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on a :

$$e^{z+z'} = e^{x+x'+i(y+y')} = e^{x+x'}e^{i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^x e^{iy} e^{x'} e^{iy'} = e^z e^{z'}$$

iii) En prenant $z = z'$, le *ii)* implique immédiatement que $e^{2z} = (e^z)^2$. On démontre le cas général par récurrence sur n : si la propriété est vraie à l'ordre $n-1$, on applique le *ii)* avec $z' = (n-1)z$, ce qui donne $e^{nz} = e^{z+(n-1)z} = e^z e^{(n-1)z} = e^z (e^z)^{n-1} = (e^z)^n$. La propriété est donc vraie à l'odre n et donc la récurrence est bien démontrée, la propriété est varie pour tout entier n.

iv) Pour $z \neq 0$, on peut appliquer le *ii)* avec $z' = -z$ et on obtient $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. D'où $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$. □

Remarque.

i) $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$

ii) La multiplication par $e^{i\theta}$ dans $\mathbb{C}$ correspond à la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.

En effet, le *i)* est une conséquence immédiate des valeurs particulières des fonctions sinus et cosinus :

$\cos \pi = 1, \sin \pi = 0,$
$\cos (-\pi) = -1, \sin (-\pi) = 0$ et
$\cos \dfrac{\pi}{2} = 0, \sin \dfrac{\pi}{2} = 1.$

Le point *ii)* est une reformulation de la remarque finale du paragraphe 9.1, qui utilise la définition de l'exponentielle complexe, 9.2.1.

9.3 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 9.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.*

En utilisant la forme polaire $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \operatorname{Arg} z \pmod{2\pi}$, l'équation $z^n = 1$ s'écrit $r^n e^{in\theta} = 1$. Les solutions sont données par : $r = 1$, $n\theta = 0 \bmod 2\pi$. Les valeurs possibles de θ sont donc à 2π près :

$$\left\{\frac{2k\pi}{n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\right\}$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 9.3.2. *L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :*

$$\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\right\}$$

Il y a donc n racines n-ième de l'unité distinctes.

Proposition 9.3.3. *La somme des racines n-ième de l'unité est nulle.*

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$ et pour tout entier naturel n, on a l'identité :

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 - z^n$$

En appliquant cette identité à $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, on obtient, en divisant par $1 - e^{i\theta}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

En appliquant cette égalité à $\theta = \dfrac{2i\pi}{n}$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}} = 0$$

$\square$

Chapitre 10

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, produit scalaire et produit vectoriel

10.1 Vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Définition 10.1.1. *Un vecteur de $\mathbb{R}^2$, respectivement de $\mathbb{R}^3$, est un couple, respectivement un triplet de réels, notés, $\vec{u} = (x, y)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, respectivement $\vec{u} = (x, y, z)$ ou encore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.*
x, y, et z sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Propriété 10.1.2. *Opérations sur les vecteurs*
i) Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées
ii) Le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles est appelé le vecteur nul
iii) La somme de deux vecteurs est le vecteur dont chaque coordonnée est la somme des coordonnées des vecteurs de départ
iv) Le produit d'un vecteur par un nombre réel est le vecteur dont chaque coordonnée est le produit de celle du vecteur de départ par ce réel.

Définition 10.1.3. *Familles libres, familles liées*
i) Une combinaison linéaire de n vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ est une expression de la forme $a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \ldots a_n\vec{u_n}$ où les $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.
ii) Une famille de vecteurs est liée s'il existe une combinaison à coefficients non tous nuls de ces vecteurs qui soit égale au vecteur nul.
iii) Une famille de vecteurs est libre si elle n'est pas liée.

Soit n un entier naturel quelconque. En niant la propriété *ii)*, on montre qu'une famille de n vecteurs $\{\vec{u_1}, \vec{u_2} : \cdots \vec{u_n}\}$ est libre si et seulement si toute égalité $\sum_{k=1}^{n} a_k\vec{u_k} = 0$ entraine $a_k = 0$ pour tout $k = 1, 2, \cdots n$.

Remarque. Deux vecteurs liés sont proportionnels. En revanche, trois vecteurs liés ne sont pas nécessairement proportionnels.

Par exemple les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels mais vérifient $\vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3} = 0$.

Proposition 10.1.4. *Dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} \begin{pmatrix} \beta 1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ non nuls sont libres si et seulement si $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.*

Démonstration. Supposons $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. On cherche à résoudre l'équation

$$x\vec{u_1} + y\vec{u_2} = 0$$

c'est-à-dire que l'on cherche les solutions du système

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par α_2 et la deuxième par α_1, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = 0 \\ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)y = 0 \end{cases}$$

Ceci implique $y = 0$ et donc aussi que $x = 0$.

L'équation $x\vec{u_1} + y\vec{u_2} = 0$ a pour seule solution $x = 0$ et $y = 0$. D'après la définition 10.1.3, les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont bien libres

Réciproquement, on procède par contraposée :

Supposons que $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Les vecteurs n'étant pas nuls, on peut supposer par exemple que $\alpha_1 \neq 0$. On pose $\lambda = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ et alors $\alpha_1\beta_2 = \lambda\alpha_2\alpha_1$ et en divisant par α_1, on trouve $\beta_2 = \lambda\alpha_2$. On a donc $\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ et les vecteurs sont bien liés. □

On a des propriétés analogues dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 10.1.5. *Repères*

i) Un repère de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, où O est un point de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{i}, \vec{j}$ sont deux vecteurs libres.

ii) Un repère de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, où O est un point de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont trois vecteurs libres.

Un exemple immédiat de repère dans $\mathbb{R}^2$ est formé de l'origine O et du couple de vecteurs $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce repère s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

De la même façon dans $\mathbb{R}^3$, le repère formé de l'origine O et du triplet de vecteurs $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 10.1.6. *Coordonnées*

i) Dans un repère $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathbb{R}^2$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, (x, y) sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère. Tout point A est repéré par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$

ii) Dans un repère $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (x, y) sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère. Tout point A est repéré par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$

Démonstration. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\vec{i} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. Comme on l'a vu ci dessus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont libres si et seulement si $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = u_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = u_2 \end{cases}$$

admet une solution unique et donc si x_0, y_0 est cette solution, $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, le raisonnement se fait de la même façon. □

Remarque. La proposition 10.1.6 implique en particulier que dans $\mathbb{R}^2$, 3 vecteurs non nuls sont nécessairement liés. De même, dans $\mathbb{R}^3$, 4 vecteurs non nuls sont toujours liés.

Application 10.1.7.

i) Si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont deux points de $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

ii) Si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sont deux points de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

10.2 Droites et plans

Notations 10.2.1. *Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Alors l'ensemble $A + \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des vecteurs de coordonées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x = a_1 + \lambda u_1$ et $y = a_1 + \lambda u_2$, ce que l'on peut aussi écrire*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Il existe une notation équivalente dans R^3.

Définition 10.2.2. *Droites dans $\mathbb{R}^2$.*

i) On appelle droite vectorielle engendrée par un vecteur $\vec{u} \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble défini par : $D = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

ii) On appelle droite affine passant par un point A et engendrée par un vecteur $\vec{u} \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble : $D = A + \mathbb{R}\vec{u} = A + \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

iii) Ces équations définissent une représentation paramétrique de la droite D.

Définition 10.2.3. *Droites dans $\mathbb{R}^3$.*

i) On appelle droite vectorielle engendrée par un vecteur $\vec{u} \neq 0$ de $\mathbb{R}^3$, l'ensemble défini par : $D = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

ii) On appelle droite affine passant par un point A et engendrée par un vecteur $\vec{u} \neq 0$ de $\mathbb{R}^3$, l'ensemble : $D = A + \mathbb{R}\vec{u} = A + \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

iii) Ces équations définissent une représentation paramétrique de la droite D.

Définition 10.2.4. *Plans dans $\mathbb{R}^3$*

i) On appelle plan vectoriel engendré par deux vecteur libres $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$, l'ensemble : $P = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

ii) On appelle plan affine passant par un point A et engendrée par deux vecteurs libres $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$, l'ensemble : $P = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = A + \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

iii) Ces équations définissent une représentation paramétrique du plan P.

Proposition 10.2.5. *Représentation cartésinne*

i) Un point M de $\mathbb{R}^2$ appartient à une droite si ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient une équation du type $ax + by = c$, où a, b, c sont des coefficients réels et où $c = 0$ s'il s'agit d'une droite vectorielle.

ii) Un point M de $\mathbb{R}^3$ appartient à un plan si ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient une équation du type $ax + by + cz = d$, où a, b, c, d sont des coefficients réels et où $d = 0$ s'il s'agit d'un plan vectoriel.

iii) Un point M de $\mathbb{R}^3$ appartient à une droite si ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient deux équations de plans. Une droite dans $\mathbb{R}^3$ apparaît ainsi comme l'intersection de deux plans.

Définition 10.2.6. *Les équations de la proposition 10.2.5 s'appellent des représentation cartésiennes des droites D ou des plans P.*

Démonstration. i) On applique la définition 10.2.2 : soit D la droite affine définie par $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Alors le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à la droite D si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

Cette équation équivaut à

$$\alpha_2(x - a_1) - \alpha_1(y - a_2) = 0$$

qui est bien une équation du type annoncé avec

$$a = \alpha_2 \qquad b = -\alpha_2 \qquad c = \alpha_2 a_1 - \alpha_1 a_2$$

La droite D est linéaire si et seulement si $A = O$ c'est-à-dire si $a_1 = a_2 = 0$ et donc une droite affine est représentée par une équation du type : $ax + by = 0$, avec

$$a = \alpha_2 \qquad b = -\alpha_1$$

ii) On applique la définition 10.2.4 : soit P le plan affine défini par $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Alors le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au plan P si et seulement si il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$.
Cette équation équivaut à

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(x - a_1) - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(y - a_2) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(z - a_3) = 0$$

qui est bien une équation du type annoncé avec

$$a = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \qquad b = -(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) \qquad c = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

et

$$d = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)a_1 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)a_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)a_3$$

La plan P est linéaire si et seulement si $A = O$ c'est-à-dire si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et donc un plan affine est représentée par une équation du type : $ax + by + cz = 0$, avec

$$a = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \qquad b = -(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) \qquad c = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

iii) On applique la définition 10.2.3 : soit D la droite affine définie par $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Alors le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à la droite D si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

Cette équation équivaut à

$$\alpha_2\alpha_3(x - a_1) = -\alpha_1\alpha_3(y - a_2) = \alpha_1\alpha_2(z - a_3)$$

qui représente bien l'équation de deux plans.

La droite D est linéaire si et seulement si $A = O$ c'est-à-dire si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et donc une droite affine est représentée par les équations :

$$\alpha_2\alpha_3 x = -\alpha_1\alpha_3 y = \alpha_1\alpha_2 z$$

$\square$

Exemple 10.2.7.
i) *L'ensemble* $\{(\lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ *est la droite vectorielle de* $\mathbb{R}^2$*, d'équation cartésienne* $2x - y = 0$.
ii) *L'ensemble* $\{(x_0+\lambda, y_0+2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ *est la droite affine de* $\mathbb{R}^2$*, d'équation cartésienne* $2x - y = 2x_0 - y_0$.
iii) *L'ensemble* $\{(\mu, \lambda+\mu, 2\lambda+\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ *est le plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*, engendré par les vecteurs* $(0,1,2)$ *et* $(1,1,1)$*, d'équation cartésienne* $2x - y - z = 0$.

10.3 Produit scalaire, produit vectoriel

Dans ce paragraphe, on se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que l'on munit $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$ ou $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ où les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et de longueur 1.

Définition 10.3.1. *Produit scalaire dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$
i) *Le produit scalaire de deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$*, de coordonnées* $\vec{u_1} = (x_1, y_1)$ *et* $\vec{u_2} = (x_2, y_2)$ *est le réel* $(\vec{u_1} \mid \vec{u_2}) = x_1x_2 + y_1y_2$.
ii) *Le produit scalaire de deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*, de coordonnées* $\vec{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$ *et* $\vec{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$ *est le réel* $(\vec{u_1} \mid \vec{u_2}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Propriété 10.3.2. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *comme dans* $\mathbb{R}^3$*, le produit scalaire a les propriétés suivantes :*
i) *Le produit scalaire est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.*
ii) *Le produit scalaire est symétrique :* $(\vec{u_1} \mid \vec{u_2}) = (\vec{u_2} \mid \vec{u_1})$.
iii) *Le produit scalaire est défini positif :* $(\vec{u} \mid \vec{u}) \geq 0$*, et* $(\vec{u} \mid \vec{u}) = 0 \implies \vec{u} = 0$.

Définition 10.3.3. *On dit que deux vecteurs non nuls de* $\mathbb{R}^2$ *(respectivement de* $\mathbb{R}^3$*) sont orthogonaux si leur produit scalaire dans* $\mathbb{R}^2$ *(respectivement de* $\mathbb{R}^3$*) est nul.*

Remarque. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, en utilisant l'identification, faite au chapitre 9, du plan euclidien avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ où deux vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ sont représentés par les deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on peut retrouver la signification géométrique de l'orthogonalité de deux vecteurs.

En effet, mettons ces nombres complexes sous forme polaire, soit $z = \rho e^{\theta}$ et $z' = \rho' e^{\theta'}$, où $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $x' = \rho'\cos\theta'$, $y' = \rho'\sin\theta'$.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = \rho\rho' (\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') = \rho\rho'\cos(\theta - \theta')$$

Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors ρ et ρ' ne sont pas nuls et le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul si et seulement si $\theta - \theta' = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, c'est-à-dire si ces vecteurs sont orthogonaux.

Application 10.3.4. *i) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, le vecteur de coordonnées (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ est orthogonal à la droite d'équation $ax + by = c$.*
ii) Pour tout $d \in \mathbb{R}$, le vecteur de coordonnées (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$ est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = d$.

En effet, il suffit de remarquer que la droite affine d'équation $ax + by = c$ est parallèle à la doite vectorielle d'équation $ax + by = 0$. Cette dernière condition exprime bien que le produit scalaire d'un vecteur de la droite D de coordonndes (x, y), est orthogonal au vecteur de coordonnées (a, b).

On peut faire le même raisonnement avec un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 10.3.5. *Pour un vecteur $\vec{u}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on pose :*

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\vec{u} \mid \vec{u})}$$

Le nombre positif $||\vec{u}||$ est appelé la norme du vecteur $\vec{u}$.

La norme d'un vecteur est sa longueur au sens géométrique du terme. Elle vérifie les propriétés immédiates :

- $||\vec{u}|| \geq 0$ et $||\vec{u}|| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = 0$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda\vec{u}|| = |\lambda| ||\vec{u}||$.

Pour que cette définition soit effectivement celle d'une norme, il faut une prorpiété supplémentaire, l'inégalité triangulaire, qui est un corollaire 10.3.7 de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, 10.3.6.

Théorème 10.3.6. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$) on a :

$$|(\vec{u} \mid \vec{v})| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés.

Démonstration. On va montrer cette proposition dans le cas de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, alors on peut écrire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda x + x')^2 + (\lambda y + y')^2 \geq 0$$

En développant, on trouve :

$$\lambda^2(x^2+y^2)+2\lambda(xx'+yy')+(x'^2+y'^2)\geq 0$$

Ce polynôme du deuxième degré en λ est toujours positif sur $\mathbb{R}$ et donc son discriminant réduit est négatif ou nul, soit :

$$(xx'+yy')^2-(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)\leq 0$$

ce qui donne $(xx'+yy')^2 \leq (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)$, et en prenant la racine carrée des deux membres, on trouve bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|xx'+yy'|\leq \sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{(x'^2+y'^2)}$$

Le cas d'égalité se produit lorsque le discriminant est nul et donc correspond à l'existence d'une racine double λ_0 du polynôme $(\lambda x+x')^2+(\lambda y+y')^2$. Ce polynôme ne peut s'annuler que si $x=-\lambda_0 x'$ et $y=-\lambda_0 y'$ ce qui veut dire que $\vec{u}=-\lambda_0\vec{v}$. L'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est bien vérifiée que si les vecteurs sont proportionnels. □

Corollaire 10.3.7. *L'application $\vec{u}\to ||\vec{u}||=\sqrt{(\vec{u}\mid\vec{u})}$ de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) dans $\mathbb{R}_+$, définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.*
En particulier, on a l'inégalité triangulaire : $||\vec{u}+\vec{v}||\leq ||\vec{u}||+||\vec{v}||$.

Démonstration. Comme précédement, on montre ce résultat dans $\mathbb{R}^2$:
Soit $\vec{u}=(x,y)$ et $\vec{v}=(x',y')$, alors :

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2=(x+x')^2+(y+y')^2=(x^2+y^2)+(x'^2+y'^2)+2(xx'+yy')=||\vec{u}||^2+||\vec{u}||^2+2(\vec{u}\mid\vec{v})$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, 10.3.6, on obtient :

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2\leq ||\vec{u}||^2+||\vec{u}||^2+2||\vec{u}||||\vec{v}||=(||\vec{u}||+||\vec{v}||)^2$$

Il suffit donc de prendre la racine carrée des deux membres pour obtenir l'inégalité triangulaire. □

Définition 10.3.8. *Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$*
Le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u_1}=(x_1,y_1,z_1)$ et $\vec{u_2}=(x_2,y_2,z_2)$ est le vecteur de coordonnées :

$$\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}=(y_1z_2-y_2z_1,x_2z_1-x_1z_2,x_1y_2-x_2y_1)$$

Propriété 10.3.9. *(admise)*
i) Le produit vectoriel est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.
ii) Le produit vectoriel est anti-symétrique : $\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}=-\vec{u_2}\wedge\vec{u_1}$.
iii) Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si les deux vecteurs sont liés
iv) Le vecteur $\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

La propriété *iv)* monte en particulier que le vecteur $\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}$ est othogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

Chapitre 11

Polynômes, racines

11.1 Polynômes

Dans ce chapitre, on introduit la notation X qui représente, soit une variable réelle x, soit une variable complexe z.

Les polynômes sont des fonctions particulières, qui sont définis soit sur $\mathbb{R}$, soit sur $\mathbb{C}$. On les considère donc comme des fonctions de X.

Définition 11.1.1. *Un polynôme sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ *est une expression de la forme :*

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où les a_k sont des éléments de $\mathbb{K}$, appelés coefficients du polynôme P.
Si $a_n \neq 0$, le degré du polynôme P est n, on note $\deg P = n$.
Un monôme est un polynôme n'ayant qu'un seul élément, soit aX^n.

Notations 11.1.2. *L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ est dénoté $\mathbb{K}[X]$.*
L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$, de degré inférieur à n est dénoté $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 11.1.3. *Opérations sur $\mathbb{K}[X]$*
Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes sur $\mathbb{K}$.
Quitte à introduire des coefficients nuls, on peut supposer que $m = n$.

i) *La somme de P et Q est le polynôme défini par :*

$$(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$$

ii) *Le produit de P et Q est le polynôme défini par :*

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{k} (a_j b_{k-j}) X^k$$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau unitaire, commutatif et intègre.

Un ensemble E est un anneau unitaire, commutatif et intègre s'il est muni de deux lois, $+$ et $\cdot$, qui vérifient les axiomes suivants, voir 1.2.6 pour les définitions :

$\star$ $(E, +)$ est un groupe commutatif

$\star$ $(E, \cdot)$
- La mutiplication est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition et a un élément unité.
- Le produit de deux éléments de E n'est nul que si l'un ou l'autre de ces éléments est nul.

On remarquera que les éléments non nuls d'un anneau intègre n'ont pas forcément d'inverse. C'est l'absence de cette propriété qui fait la différence entre les anneaux unitaires intègres et les corps.

Démonstration. Ces propriétés se vérifient facilement à partir des définitions des opérations sur $\mathbb{K}[X]$. $\square$

Proposition 11.1.4. *Si P et Q sont des polynômes, alors :*
i) deg $(P + Q) \leq \sup\{\deg P, \deg Q\}$
ii) deg $(P \times Q) = \deg P + \deg Q$

Démonstration. Ces deux propriétés se démontrent de la même façon, il suffit de regarder les termes de plus haut degré des deux polynômes. $\square$

On peut remarquer que si les degrés des deux polynômes P et Q sont égaux, il peut y avoir annulation des termes de plus haut degré en faisant leur somme. Dans ce cas, deg $(P + Q) < \sup\{\deg P, \deg Q\}$.

En revanche, si les degrés des polynômes P et Q sont différents, alors, on ne peut pas avoir d'annulation des termes de plus haut degré en faisant leur somme. Dans ce cas-la, deg $(P + Q) = \sup\{\deg P, \deg Q\}$.

Définition 11.1.5. *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ un polynôme. La dérivée de P est le polynôme $P'(X) = \sum_{k=0}^{m} k a_k X^{k-1}$.*
On définit de la même manière les dérivées successives de P, notées $P^{(m)}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Si on considère les polynômes comme des fonctions d'une variable rélle x, alors cette définition est exactement la définition usuelle de la dérivée de la fonction P.

Remarque. Si P est de degré n, alors le degré de P' est $n - 1$. Par suite, $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul.

11.2 Division euclidienne

Proposition 11.2.1. *Etant donné 2 polynômes A et B, à coeffcients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, B n'étant pas le polynôme nul, il existe deux polynômes Q et R, où le degré de R est strictement inférieur au degré de B tels que*

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$$

Le couple P, Q est unique.

Définition 11.2.2. *Le polynôme Q s'appelle le quotient et le polynôme R le reste de la division euclidienne de A par B.*

Démonstration. Posons $n = \deg A$ et $m = \deg B$. Si $m > n$, alors $Q = 0$ et $R = A$ conviennent.

Sinon, on cherche un monôme $Q_1(X) = aX^{n-m}$, tel que le terme de plus haut degé de $B(X)Q_1(X)$ soit égal à celui de $A(X)$. Alors on pose

$$R_1(X) = A(X) - B(X)Q_1(X)$$

Le degré de R_1 est strictement inférieur à celui de A puisqu'on a éliminé le terme de plus haut degré.

Si le degré de R_1 est supérieur ou égal au degré de B, on peut donc recommencer l'opération avec R_1. On élimine son terme de plus haut degré en mutipliant B par un monôme approprié Q_2, soit

$$R_2(X) = R_1(X) - B(X)Q_2(X)$$

Cette suite d'opérations s'arrête après k opérations, lorsque le degré de R_k est strictement inférieur au degré de B, ce qui se produit forcément puisque la suite des degrés des restes est strictement décroissante.

En remontant les calculs et en posant $Q(X) = \sum_{i=1}^{k} Q_i(X)$, on voit que

$$A(X) = Q(X)B(X) + R_k(X), \text{ avec } \deg R_k < \deg B$$

L'unicité se démontre par contraposée : supposons qu'il existe P, Q et P', Q' tels que

$$A(X) = B(X)Q(X) + R(X) = B(X)Q'(X) + R'(X)$$

avec $\deg R < \deg B$, $\deg R' < \deg B$.

Alors on doit avoir : $B(X)\left(Q(X) - Q'(X)\right) = R(X) - R'(X)$, ce qui n'est possible que si $(Q(X) - Q'(X)) = 0$ et donc aussi $R(X) - R'(X) = 0$, ce qui prouve bien l'unicité des quotient et reste de la division euclidienne.. □

Exemple 11.2.3. *Soit $A(X) = X^5 + 2X^3 - 3X - 2$ et $B(X) = X^3 + X + 1$. La division euclidienne de A par B donne :*

$$A(X) = B(X)\left(X^2 + 1\right) + \left(-X^2 - 4X - 3\right)$$

On peut disposer la suite des opérations de la division euclidienne d'un polynôme par un autre comme la suite des opérations de la division euclidienne d'un nombre entier par un autre :

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
X^5 & +2X^3 & & -3X & -2 & X^3 & +X & +1 \\
\cline{6-8}
-X^5 & -X^3 & -X^2 & & & X^2 & +1 & \\
\cline{1-5}
 & X^3 & -X^2 & -3X & -2 & & & \\
 & -X^3 & & -X & -1 & & & \\
\cline{2-5}
 & & -X^2 & -4X & -3 & & &
\end{array}
$$

11.3 Racines dans $\mathbb{C}$

Définition 11.3.1. *On appelle racine d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$, un nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.*

Théorème 11.3.2. *Soit P un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$ et soit z_0 une racine de P. Alors, il existe un polynôme Q tel que $\deg Q = \deg P - 1$ et vérifiant :*

$$P(X) = (X - z_0)Q(X)$$

Démonstration. On effectue la division euclidienne de P par le polynôme $X - z_0$: il existe un polynôme Q et un polynôme de degré strictement inférieur à 1, c'est-à-dire une constante c tels que $P(X) = Q(X)(X - z_0) + c$.

En prenant $X = z_0$, on trouve $c = 0$, ce qui prouve bien que

$$P(X) = (X - z_0)Q(X)$$

□

Définition 11.3.3. *Racines complexes*

i) *Le nombre réel z_0 est une racine simple d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$, si*

$$P(X) = (X - z_0)Q(X) \quad \text{et} \quad Q(z_0) \neq 0$$

ii) *Le nombre réel z_0 est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$, si*

$$P(X) = (X - z_0)^k Q(X) \quad \text{et} \quad Q(z_0) \neq 0$$

Proposition 11.3.4. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, z_0 est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$ si et seulement si*

$$P(z_0) = 0, P'(z_0) = 0, \cdots P^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ donné. Si z_0 est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme P sur $\mathbb{C}$, alors par définition il existe un polynôme Q tel que

$$P(X) = (X - z_0)^k Q(X) \text{ et } Q(z_0) \neq 0$$

En utilisant la dérivation des polynômes ; 11.1.5, on démontre par récurrence que si $1 \leq j \leq k$, alors il existe un polynôme R_j tel que :

$$P^{(j)}(X) = k(k-1)\cdots(k-j+1)(X-z_0)^{k-j}Q(X) + (X-z_0)^{k-j+1}R_j(X)$$

Pour $j \leq k-1$, on trouve bien

$$P^{(j)}(z_0) = 0$$

Pour $j = k$, on a $P^{(k)}(X) = k!Q(X) + (X-z_0)R_k(X)$, d'où

$$P^{(k)}(z_0) = k!Q(z_0) \neq 0$$

Réciproquement, on écrit le polynôme P sous la forme

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i(X-z_0)^i$$

Alors, pour tout $1 \leq j \leq k$,

$$P^{(j)}(X) = \sum_{i=j}^{n} a_i(X-z_0)^{i-j}$$

et donc $P^{(j)}(z_0) = a_j$.

Si $P(z_0) = 0, P'(z_0) = 0, \cdots P^{(k-1)}(z_0) = 0$ et $P^{(k)}(z_0) \neq 0$,les coefficients du polynôme P vérifient : $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ et $a_k \neq 0$.
Donc

$$P(X) = \sum_{i=k}^{n} a_i(X-z_0)^i = (X-z_0)^k \sum_{j=0}^{n-k} a_{j+k}(X-z_0)^j$$

Le polynôme $Q(X) = \sum_{j=0}^{n-k} a_{j+k}(X-z_0)^j$ vérifie bien $Q(z_0) = a_k \neq 0$. □

Théorème 11.3.5. *Théorème de d'Alembert-Gauss (admis)*
Tout polynôme non constant sur $\mathbb{C}$ admet au moins une racine.

Corollaire 11.3.6. *Tout polynôme P non constant sur $\mathbb{C}$ de degré n, se factorise sous la forme :*

$$P(X) = a_n(X-z_1)\cdots(X-z_{n-1})(X-z_n)$$

où les z_k, $k = 1, \cdots, n-1, n$ sont les racines (distinctes ou non) de P.

Démonstration. On procède de proche en proche : si P est un polynôme non constant, de degré n, par le théorème de D'Alembert-Gauss, 11.3.5, P a au moins une racine z_1. Le polynôme P s'écrit donc : $P(X) = (X-z_1)P_1(X)$.

On peut recommencer à appliquer le théorème de D'Alembert-Gauss avec P_1 et ainsi de suite. Comme à chaque étape, le polynôme P_{j+1} est de degré strictement inférieur à celui de P_j, le processus va s'arrêter au bout de n étapes.

En remontant les calculs ; ceci montre bien que P s'écrit sous la forme

$$P(X) = a_n(X - z_1) \cdots (X - z_{n-1})(X - z_n)$$

où les $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sont les racines successives données par le théorème de D'Alembert-Gauss. $\square$

Application 11.3.7. *Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.*

Un polynôme P, de degré n peut s'écrire de deux façon différentes :
Par définition : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$.
Par le corollaire 11.3.6 : $P(X) = a_n(X - z_1) \cdots (X - z_{n-1})(X - z_n)$, avec $a_n \neq 0$.

En développant la deuxième expression et en réordonnant les termes selon les puissances croissantes de X, on va trouver des relations entre les coefficients du polynôme $a_0, a_1, \cdots, a_n$ et ses racines $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Les plus simples et aussi les plus utiles sont :

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \prod_{j=1}^{n} z_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Exemple 11.3.8. *Les racines n-ièmes de l'unité définies en 9.3.1 sont les racines du polynôme* $X^n - 1$*. On retrouve le fait que la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut* 0*. On voit également que leur produit vaut* $(-1)^{n+1}$*.*

11.4 Racines dans $\mathbb{R}$

Le théorème de d'Alembert-Gauss n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{R}$: Un polynôme à coefficients réels n'a pas nécessairement de racine réelle comme le montre l'exemple du polynôme à coefficients réels X^2+1 et dont les racines sont les nombres complexes non réels i et $-i$.
Un polynôme P à coefficient réel peut être considéré comme un polynôme sur $\mathbb{C}$ donc ayant des racines dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss. On a alors :

Proposition 11.4.1. *Soit P un polynôme non nul sur $\mathbb{R}$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une racine de P dans $\mathcal{C}$. Alors $\bar{z}_0$ est aussi racine de P.*

Démonstration. Si z_0 est une racine du polynôme à coefficients réels P, alors par définition $P(X) = (X - z_0)Q(X)$.

Mais alors $\overline{P(X)} = P(X) = \overline{(X - z0)Q(X)} = (X - \overline{z_0})\overline{Q(X)}$ et donc $\overline{z_0}$ est aussi racine de P. $\square$

Corollaire 11.4.2. *Tout polynôme P non constant sur $\mathbb{R}$ de degré n, se factorise sous la forme :*

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^{k} (X - x_i) \prod_{j=1}^{l} \left(X^2 - (z_j + \bar{z}_j)X + z_j \bar{z}_j\right)$$

avec $k + 2l = n$ et où les x_i, $i = 1, \cdots, k$ sont les racines réelles (distinctes ou non) de P et où les z_j, $j = 1, \cdots, l$ sont les racines complexes non réelles (distinctes ou non) de P considéré comme polynôme complexe.

Démonstration. On considère le polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ comme un polynôme sur $\mathbb{C}$ et on lui applique le corollaire 11.3.6. Parmi les racines de P, on appelle $x_1, x_2, \cdots, x_k$ ses racines réelles.

Les autres racines sont non réelles mais alors, d'après la proposition 11.4.1, si z_i est une racine de P alors $\overline{z_i}$ l'est aussi. Donc le polynôme P s'écrit

$$P(X) = (X - z_i)(X - \overline{z_i)}Q(X) = \left(X^2 - (z_j + \bar{z}_j)X + z_j \bar{z}_j\right) Q(X)$$

En appliquant ce raisonnement à toutes les racines non réelles de P, on obtient bien la factorisation voulue.
Le degré de P est la somme du nombre de ses racines réelles et de 2 fois le nombre de polynômes de degré 2 correspondant aux racines non réelles. $\square$

Chapitre 12

Fractions rationnelles

12.1 Fractions rationnelles

Dans ce chapitre, on utilise la notation X, introduite dans le chapitre 11 sur les polynômes, qui représente, soit une variable réelle x, soit une variable complexe z.
Les fractions rationnelles sont des fonctions particulières, qui sont définies soit sur $\mathbb{R}$, soit sur $\mathbb{C}$.
Comme les polynômes, on les considère donc comme des fonctions de X.

Définition 12.1.1. *Une fraction rationnelle est une expression de la forme :*

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

où P et Q sont des polynômes, Q n'étant pas le polynôme nul.
L'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{C}(X)$ et sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(X)$.

Remarque. L'expression $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ n'est pas unique.

En effet, $R(x)$ s'écrit aussi $R(X) = \dfrac{P(X)S(X)}{Q(X)S(X)}$ où S est n'importe quel polynôme non nul.

Définition 12.1.2. *Deux polynômes P et Q sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de facteur commun de degré supérieur ou égal à 1, ou encore qu'il n'existe pas de polynôme non constant divisant à la fois P et Q*

Proposition 12.1.3. *Forme irréductible*
Toute fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$ peut s'écrire $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$, où les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

Démonstration. Supposons que $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ où les polynômes P et Q ont un facteur commun non nul $S(X)$.

Alors on peut écrire : $P(X) = S(X)P_1(X)$ et $Q(X) = S(X)Q_1(X)$ donc en simplifiant :

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{S(X)P_1(X)}{S(X)Q_1(X)} = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

On peut ainsi éliminer tous les facteurs communs à P et Q pour obtenir la forme irréductible de R. □

Proposition 12.1.4. *Toute fraction rationnelle irréductible peut s'écrire sous la forme :*

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = D(X) + \frac{S(X)}{Q(X)}$$

où le degré de S est strictement inférieur au degré de Q.
Le polynôme D s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle.

Démonstration. On effectue la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q. Si D le quotient et S le reste, alors on peut écrire :

$$R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{D(X)Q(X) + S(X)}{Q(X)} = D(X) + \frac{S(X)}{Q(X)}$$

et deq $S <$ deg Q. □

12.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Définition 12.2.1. *Un pôle d'une fraction rationnelle $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ sur $\mathbb{C}$, sous forme irréductible, est un nombre complexe z_0 tel que*

$$Q(z_0) = 0$$

Le pôle z_0 est d'ordre de multiplicité p si

$$Q(z) = (z - z_0)^p \tilde{Q}(z) \quad \text{avec} \quad \tilde{Q}(z_0) \neq 0$$

Définition 12.2.2. *On appelle éléments simples sur $\mathbb{C}$, les fractions rationnelles du type :*

$$\frac{\alpha}{(X - z)^n}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 12.2.3. *Décoposition en éléments simple sur $\mathbb{C}$. (admis)*
Soit $R(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle irréductible et soient $z_1, \ldots, z_k$ ses pôles d'ordre de multiplicité respectifs $n_1, \ldots, n_k$, $k \in \mathbb{N}$.
Alors il existe des nombres complexes $\alpha_{i,j}, i = 1, \ldots k\ , j = 1, \ldots n_i$ tels que R se décompose en somme d'éléments simples :

$$R(X) = D(X) + \frac{S(X)}{Q(X)} = D(X) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - z_i)^j}$$

Remarque. Si la fraction rationnelle est à coefficients réels et si les pôles sont réels, alors cette décomposition en éléments simples est à valeurs réelles.

Exemple 12.2.4.

i) $\dfrac{1}{X^2-1} = \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{2(X+1)}$.

i) $\dfrac{1}{X^2+1} = \dfrac{1}{2i(X-i)} - \dfrac{1}{2i(X+i)}$.

12.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Définition 12.3.1. *On appelle éléments simples sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles du type :*

$$\frac{\alpha}{(X-x)^n} \text{ et } \frac{aX+b}{(X^2+\lambda X+\mu)^m}$$

où $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in R$ et $\lambda^2 - 4\mu < 0$.

Théorème 12.3.2. *Décoposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.*
Soit $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle irréductible. Si le polynôme Q se factorise en :

$$Q(X) = a\prod_{i=1}^{k}(X-x_i)^{n_i}\prod_{p=1}^{l}(X^2+\lambda_p X+\mu_p)^{m_p}$$

la fration rationnelle R se décompose en éléments simples sous la forme :

$$R(X) = D(X) + \frac{S(X)}{Q(X)} = D(X) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\alpha_{i,j}}{(X-x_i)^j} + \sum_{p=1}^{l}\sum_{q=1}^{m_p}\frac{a_{p,q}X+b_{p,q}}{(X^2+\lambda_p X+\mu_p)^q}$$

où tous les coefficients sont dans $\mathbb{R}$ et où $\lambda_p^2 - 4\mu_p < 0$ pour tout $p = 1, 2, \cdots, l$.

Démonstration. On effectue la décomposition en éléments simples de R sur $\mathbb{C}$.

Les éléments simples de la forme $\dfrac{\alpha}{(X-x)^n}$ correspondent aux pôles réels de R.

Les éléments simples de la forme $\dfrac{a_{p,q}X+b_{p,q}}{(X^2+\lambda_p X+\mu_p)^q}$ correspondent aux pôles non réels, qui sont alors complexes conjugués. On regroupe les élements simples associés à un pôle non réel avec celui qui est associé au pôle complexe conjugué. □

Exemple 12.3.3. *i)* $\dfrac{1}{X(X^2+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{X^2+1}$.

ii) $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{X}{X^2+1} - \dfrac{X}{(X^2+1)^2}$.

La décomposition en éléments simples des fractions rationnelles est utilisée pour intégrer ces fonctions sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Il est en effet possible de trouver des primitives des éléments simples et ainsi d'obtenir des primitives des fractions rationnelles.

Bibliographie

[1] Gérard BOURDAUD,
Mathématiques pour la physique Diderot éditeur, Arts et Sciences, Paris (1996).

[2] Claire DAVID et Sami MUSTAPHA, *Mathématiques - Tout le cours en fiches niveau L1*, Dunod, Paris, (2014).

[3] Jean-Pierre RAMIS et André WARUSFEL, *Tout-en-un pour la licence - Niveau L1 - 2ème édition : cours complet, exemples et exercices corrigés*, Dunod, Paris, (2013).

[4] Jaques VAUTHIER et François ARIBAUD, *DEUG, Tome 1, 1ère année, Algèbre, Analyse*, ESKA, Paris, (2000)

Index