LM203 — Laurent Koelblen — TP du 10 novembre 2006

Algèbre linéaire

Liste des fonctions de Maxima que l'on peut utiliser pour ce TP :
- Paramètres : `keepfloat:true`
- Matrices et algèbre linéaire : `load(eigen)`, `matrix`, `submatrix`, `ident`, `invert`, `determinant`, « `.` », `transpose`, `charpoly`, `columnvector`, `uvect`, `innerproduct`
- Résolution d'équations : `allroots`,
- Manipulation d'expressions : `expand`, `rhs`, `makelist`, `length`

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de M. Pourquoi sait-on a priori (sans calculer M^{-1}) que M^{-1} est à coefficients entiers ?

   (Pour cette question et les suivantes, consulter dans la documentation la partie concernant les matrices et l'algèbre linéaire. Exécuter éventuellement la commande « `load(eigen);` *» pour accéder à certaines fonctions. Exécuter la commande «* `keepfloat:true;` *» pour empêcher la conversion de flottants en rationnels dans certains calculs d'algèbre linéaire.)*

2. Calculer $N = M^{-1}$, $X = M^{-1}V$ et $Y = M^{-1}W$ où $V = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 32.01 \\ 22.99 \\ 33.01 \\ 30.99 \end{pmatrix}$.

   On constate que si les coefficients de V et W sont très proches il n'en est pas de même des coefficients de X et de Y. On va voir ici pourquoi.

3. Questions mathématiques :

   (a) Pourquoi sait-on a priori (sans faire de calcul) que M est diagonalisable, que ses valeurs propres sont réelles, que les espaces propres sont orthogonaux (et qu'il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres) ?

   (b) Soit λ_1 la plus petite des valeurs propres, en valeur absolue, et V_1 un vecteur propre associé. Montrer que pour tout vecteur U on a l'inégalité :

   $$||M^{-1}U|| \geq \left| \frac{< V_1, U >}{\lambda_1} \right| \tag{1}$$

   ($||\cdot||$ désignant la norme usuelle et $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire usuel).

4. On note p le polynôme caractéristique de M. Calculer le et montrer par un calcul simple (sur Maxima) qu'il n'a pas de racine multiple (sans calculer les racines).

5. On note $vp1$, $vp2$, $vp3$, $vp4$ les valeurs propres de M classées par ordre croissant des valeurs absolues. Déterminer **numériquement** ces valeurs propres.

   (Pour cette question, consulter dans la documentation la partie concernant la résolution d'équations.)

6. Déterminer **numériquement** des vecteurs propres $Vp1$, $Vp2$, $Vp3$, $Vp4$ associés au valeurs propres $vp1$, $vp2$, $vp3$, $vp4$, et formant une base orthonormée.

   Soit D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres $vp1$, $vp2$, $vp3$, $vp4$, P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $Vp1$, $Vp2$, $Vp3$, $Vp4$, et $Q = {}^tP$

   Calculer **numériquement** D, P et Q, vérifier les relations : $\det P \simeq 1$, $PQ \simeq I$, $M \simeq PDQ$ et en donner une interprétation mathématique.

7. On prend $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; quelle estimation donne l'inégalité (1) pour $||M^{-1}U||$?

8. Expliquer à l'aide du résultat précédent le phénomène d'instabilité observé.