Devoir

Important : certains calculs peuvent être fait indifféremment à la main ou avec maxima. Si vous utiliser maxima et qu'il n'y a pas d'indication dans le sujet, indiquer en détail sur la feuille les instructions utilisées.

1 Phénomène de résonance

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ (utiliser l'instruction « `assume(a>0,b>0,c>0);` ») et $w \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$f''(x) + 2af'(x) + b^2 f(x) = c\cos(wx)$$

qui modélise un mouvement oscillatoire amorti, entretenu par une force périodique.
Saisir cette équation dans maxima :

```
equadiff:diff(f(x),x,2)+2*a*diff(f(x),x,1)+b^2*f(x)=c*cos(w*x)
```

Pour faciliter la lecture des résultats on pose les conditions initiales $f(0) = p$ et $f'(0) = q$:

```
atvalue(f(x),x=0,p);
atvalue('diff(f(x),x),x=0,q);
```

1. Résoudre l'équation sans second membre $f''(x) + 2af'(x) + b^2 f(x) = 0$:

   ```
   desolve(lhs(equadiff)=0,f(x));
   ```

   Maxima demande si un certain nombre est positif, négatif ou nul. Il faut répondre « `positive;` », « `negative;` » ou « `zero;` » (avec le « ; ».) Traiter les trois cas et répondre à la :

   Question : à quelle condition sur a les solutions de cette équation sont oscillantes.

   On supposera dans la suite cette condition vérifiée : quelle instruction faut-il exécuter dans Maxima ?

2. Montrer, à l'aide de maxima, que l'équation différentielle $f''(x) + 2af'(x) + b^2 f(x) = c\cos(wx)$ admet des solutions de la forme $A\cos(wx) + B\sin(wx)$.
   Indication : remplacer $f(x)$ par $A\cos(wx) + B\sin(wx)$ dans l'équation différentielle :

   ```
   eq:ev(equadiff,f(x)=A*cos(w*x)+B*sin(w*x),diff);
   ```

   Donner deux valeurs différentes à x :

   ```
   eq1:ev(eq,x=0);
   eq2:ev(eq,x=%pi/2/w);
   ```

   et résoudre le système linéaire d'inconnues A et B ainsi obtenu :

   ```
   sol:linsolve([eq1,eq2],[A,B]);
   ```

   enfin, remplacer ces valeurs de A et B dans l'équation de départ :

   ```
   ev(eq,sol);
   ```

   et simplifier l'expression obtenue pour s'assurer que l'équation est bien vérifiée :

   ```
   fullratsimp(%);
   ```

   Question : Quelles sont les deux valeurs de A et B trouvées ?

3. Calculer $R = \sqrt{A^2 + B^2}$:

   ```
   ev(sqrt(A^2+B^2),sol);
   R:fullratsimp(%);
   ```

   Questions :

   (a) Donner la valeur de R trouvée.

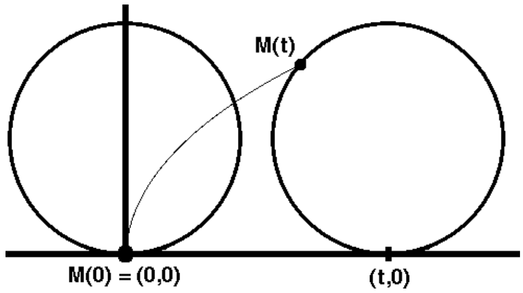
   (b) Quelle est l'interprétation mathématique (ou physique, dans la mesure ou l'équation modélise un mouvement oscillatoire) de R ?

   (c) Faire des représentations graphique de R en fonction de $w \in [0, 10]$ pour $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 1$ et pour $a = 3/2$, $b = 2$, $c = 1$. Reproduire ces graphiques sur la feuille.

   (d) Dans l'une des représentations graphiques précédentes on voit apparaître un maximum pour un $w > 0$.
   À quelle condition sur a et b la fonction R atteint-elle un maximum en un tel $w = w_{\max} > 0$? Quelle est alors la valeur de $R = R_{\max}$ correspondante ?

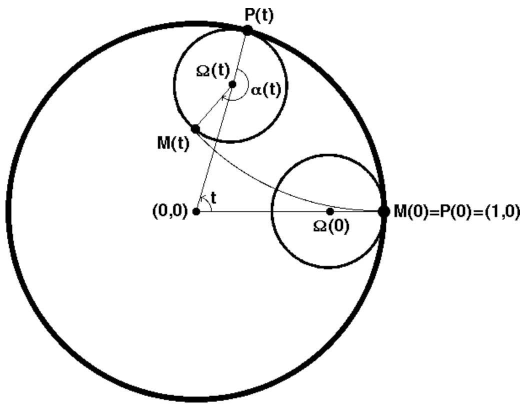
2 Cercle roulant sur des courbes

1. Un cercle de rayon 1 roule sans glisser sur la droite des abscisses. Au temps t le point de contact $P(t)$ du cercle et de la droite est le point de coordonnées $(t, 0)$.



   (a) Calculer les coordonnées du point $M(t)$ attaché au cercle qui pour $t = 0$ est le point de coordonnées $(0, 0)$.
   (b) Tracer à l'aide maxima la courbe paramétrée ainsi obtenue, pour $t \in [0, 4\pi]$.
      i. Donner l'instruction à utiliser.
      ii. Reproduire le graphique sur la feuille.

2. De la même manière un cercle de rayon $r < 1$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Le point de contact $P(t)$ à l'instant t est le point de coordonnées $(\cos t, \sin t)$.



   (a) Calculer les coordonnées du centre $\Omega(t)$ du cercle à l'instant t.
   (b) Exprimer l'angle $\alpha(t)$ entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(t)P(t)}$ et $\overrightarrow{\Omega(t)M(t)}$ en fonction de t et de r. (Remarquer que la longueur de l'arc de cercle $P(0)P(t)$ est égal à t).
   (c) En déduire les coordonnées de $M(t)$.
   (d) Tracer à l'aide de maxima
      – la courbe obtenue pour $r = 1/3$
      – la courbe obtenue pour $r = 1/4$

      Reproduire les graphiques sur la feuille.

3. Plus généralement on fait rouler un cercle de rayon r sans glisser sur une courbe paramétrée quelconque donnée par $P(t) = (x(t), y(t))$.

> Quelques rappels concernant les courbes paramétrées :
> – Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}P(t)}}{\mathrm{d}t} = (x'(t), y'(t))$. est tangent à la courbe.
> – On note $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ la norme de ce vecteur.
> – Les vecteurs
> $$\vec{T}(t) = \left(\frac{x'(t)}{v(t)}, \frac{y'(t)}{v(t)}\right) \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \left(-\frac{y'(t)}{v(t)}, \frac{x'(t)}{v(t)}\right)$$
> sont les vecteurs unitaires tangent et normal à la courbe au point $P(t)$.
> – La longeur de la courbe entre le point $P(0)$ et le point $P(t)$ est égale à
> $$s(t) = \int_0^t v(u)\mathrm{d}u$$

   Le point de contact entre le cercle et la courbe est $P(t)$.
   Le point $M(t)$ est le point attaché au cercle tel que pour $t = 0$ on ait $M(0) = P(0)$.

   (a) Exprimer les coordonnées du centre du cercle $\Omega(t)$ à l'instant t en fonction de $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ et r. (Remarquer que $\overrightarrow{P(t)\Omega(t)}$ est colinéaire à $\vec{N}(t)$.)
   (b) Exprimer l'angle $\alpha(t)$ entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(t)P(t)}$ et $\overrightarrow{\Omega(t)M(t)}$ en fonction de $s(t)$ et r.
   (c) En déduire une expression des coordonnées de $M(t)$.
   (d) On pose $P(t) = (t, t^2)$. Calculer $s(t)$ à l'aide maxima.
      i. Quelle est l'instruction utilisée ?
      ii. Quel est le résultat ?

      Calculer les coordonnées de $M(t)$ puis tracer la courbe décrite par $M(t)$ pour $r = 1/4$ ($t \in [-2, 2]$). Reproduire le graphique sur la feuille.