LM203 — Maxima — Laurent Koelblen

Devoir — Mai 2008 — Le phénomène de Gibbs

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire, 2π-périodique telle que $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0, \pi[: f(x) = 1 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$

Les coefficients de Fourier de f sont : $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(nt)\mathrm{d}t$

La somme partielle de la série de Fourier de f est : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kt)$

Il est connu que la suite de fonctions $S_n(x)$ tend simplement vers $f(x)$.

1 — Étude de $S_{10}(x)$

1. Calculer les coefficients de Fourier b_n de f à l'aide de `Maxima` :
   – donner la commande utilisée,
   – donner le résultat.
2. Donner l'expression de $S_{10}(x)$.
3. Tracer le graphe de la somme partielle $S_{10}(x)$ pour $x \in [0, \pi]$ et $y \in [0, 1.5]$:
   – donner la commande utilisée,
   – reproduire le graphique.
4. Calculer une expression simplifiée de $\sin(x)S'_{10}(x)$, à l'aide des fonctions `trigreduce` et `trigsimp` :
   – donner la suite des commandes utilisées,
   – donner le résultat.
5. En déduire les valeurs de $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour lesquelles $S'_{10}(x) = 0$.
6. Construire l'ensemble de ces valeurs, à l'aide des fonctions `makelist` et `setify` :
   – donner la suite des commandes utilisées.
7. Déterminer la valeur de x dans cet ensemble pour laquelle $S_{10}(x)$ est maximum, à l'aide de la fonction `extremal_subset` :
   – donner la commande utilisée,
   – donner le résultat,
   – donner une valeur approchée de $S_{10}(x)$ en ce point.
8. Montrer que la valeur trouvée est le maximum de $S_{10}(x)$ pour $x \in [0, \pi]$.

2 — Étude de $S_{100}(x)$

Reprendre l'étude précédente pour la somme partielle $S_{100}(x)$.

3 — Étude de $S_n(x)$

1. Donner une expression simplifiée de $\sin(x)S'_n(x)$ et en donner une preuve.
2. En déduire les valeurs de $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour lesquelles $S'_n(x) = 0$.
   On notera x_n la plus petite de ces valeurs et $M_n = S_n(x_n)$.
3. En interprétant M_n comme une somme de Riemann de la fonction $g(t) = \dfrac{2\sin(t)}{\pi t}$ montrer que la suite M_n est convergente et que sa limite M est égale à $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
4. Montrer que $\forall t \in [0, \pi] : \sin(t) \geq t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} - \dfrac{t^7}{7!}$. (On pourra partir de l'inégalité $\cos(t) \leq 1$, montrer que $\sin(t) \leq t$ puis que $\cos(t) \geq 1 - \dfrac{t^2}{2}$, etc.. Rédiger la démonstration sous forme de récurrence sera judicieux.)
5. Déduire de l'inégalité précédente une minoration de M par une fraction rationnelle > 1. (On pourra utiliser un encadrement de π par des fractions rationnelles, comme par exemple $\dfrac{31}{10} < \pi < \dfrac{32}{10}$ ou $\dfrac{333}{106} < \pi < \dfrac{22}{7}$, et faire les calculs à l'aide de `Maxima`.)
6. Interpréter le résultat trouvé.