LM203 — Maxima — Laurent Koelblen

TP n° 2 — L'équation du pendule

Liste des fonctions de Maxima que l'on peut utiliser pour ce TP :

`%pi`,
`diff`, `atvalue`, `desolve`,
`taylor`, `trunc`, `sum`, `coeff`, `makelist`,
`solve`, `subst`,
`plot2d`, `realroots`

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f''(t) + f(t) = 0 \\ f(0) = \dfrac{\pi}{6} \\ f'(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2. Tenter de résoudre l'équation du pendule avec les même conditions initiales :

$$\begin{cases} g''(t) + \sin\big(g(t)\big) = 0 \\ g(0) = \dfrac{\pi}{6} \\ g'(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   (Cette équation est celle vérifiée par l'angle d'un pendule oscillant autour de la position verticale.)

N'obtenant pas de réponse satisfaisante, calculer un développement limité de la solution de la manière suivante :

3. Poser $g(t) = \dfrac{\pi}{6} + \displaystyle\sum_{i=2}^{10} c_i t^i$ et calculer le développement limité de $g''(t) + \sin\big(g(t)\big)$ à l'ordre 8.
4. Extraire les coefficients du résultat précédent pour en faire un système d'équation (d'inconnues $c_2, \ldots, c_{10}$) et résoudre ce système.
5. Comparer les développements limités des solutions des équations (1) & (2).

Faire une représentation graphique des solutions des deux équations de la manière suivante :

6. Calculer par la méthode des questions 3. & 4. le développement limité de $g(t)$ à l'ordre 40.
7. Représenter sur un même graphique la fonction $f(t)$ (solution de l'équation (1)) et les développements limités de $g(t)$ d'ordre 10, 20, 30 et 40, pour $0 \leq t \leq \pi$ et $-\dfrac{\pi}{6} \leq y \leq \dfrac{\pi}{6}$. Sur quel intervalle ces développements limités sont-ils des bonnes approximations de $g(t)$?
8. Calculer numériquement la plus petite valeur $t_0 > 0$ telle que $g(t_0) = 0$. En déduire une approximation numérique de la période de $g(t)$. (Étant solution de l'équation du pendule, $g(t)$ est nécessairement périodique.) Comparer cette période avec celle de $f(t)$.
9. Reprendre les questions précédentes en remplaçant les conditions initiales par :

$$\begin{cases} f(0) = g(0) = \dfrac{\pi}{3} \\ f'(0) = g'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{puis par :} \qquad \begin{cases} f(0) = g(0) = \dfrac{\pi}{2} \\ f'(0) = g'(0) = 0 \end{cases}$$

   Décrire les variations de la période de $g(t)$ en fonction de ces conditions initiales.