

LM203 — Maxima — Laurent Koelblen
TP n° 5 — Phénomène de résonance

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ (utiliser l'instruction « `assume(a>0,b>0,c>0);` ») et $w \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$f''(x) + 2af'(x) + b^2f(x) = c \cos(wx)$$

qui modélise un mouvement oscillatoire amorti, entretenu par une force périodique.

Saisir cette équation dans maxima :

```
equadiff:diff(f(x),x,2)+2*a*diff(f(x),x,1)+b^2*f(x)=c*cos(w*x)
```

Pour faciliter la lecture des résultats on pose les conditions initiales $f(0) = p$ et $f'(0) = q$:

```
atvalue(f(x),x=0,p);
```

```
atvalue('diff(f(x),x),x=0,q);
```

1. Résoudre l'équation sans second membre $f''(x) + 2af'(x) + b^2f(x) = 0$:

```
desolve(lhs(equadiff)=0,f(x));
```

Maxima demande si un certain nombre est positif, négatif ou nul. Il faut répondre « `positive;` », « `negative;` » ou « `zero;` » (avec le « ; ».) Traiter les trois cas et répondre à la :

Question : à quelle condition sur a les solutions de cette équation sont oscillantes.

On supposera dans la suite cette condition vérifiée : quelle instruction faut-il exécuter dans Maxima ?

2. Montrer, à l'aide de maxima, que l'équation différentielle $f''(x) + 2af'(x) + b^2f(x) = c \cos(wx)$ admet des solutions de la forme $A \cos(wx) + B \sin(wx)$.

Indication : remplacer $f(x)$ par $A \cos(wx) + B \sin(wx)$ dans l'équation différentielle :

```
eq:ev(equadiff,f(x)=A*cos(w*x)+B*sin(w*x),diff);
```

Donner deux valeurs différentes à x :

```
eq1:ev(eq,x=0);
```

```
eq2:ev(eq,x=%pi/2/w);
```

et résoudre le système linéaire d'inconnues A et B ainsi obtenu :

```
sol:linsolve([eq1,eq2],[A,B]);
```

enfin, remplacer ces valeurs de A et B dans l'équation de départ :

```
ev(eq,sol);
```

et simplifier l'expression obtenue pour s'assurer que l'équation est bien vérifiée :

```
fullratsimp(%);
```

Question : Quelles sont les deux valeurs de A et B trouvées ?

3. Calculer $R = \sqrt{A^2 + B^2}$:

```
ev(sqrt(A^2+B^2),sol);
```

```
R:fullratsimp(%);
```

Questions :

- (a) Donner la valeur de R trouvée.
- (b) Quelle est l'interprétation mathématique (ou physique, dans la mesure où l'équation modélise un mouvement oscillatoire) de R ?
- (c) Faire des représentations graphiques de R en fonction de $w \in [0, 10]$ pour $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 1$ et pour $a = 3/2$, $b = 2$, $c = 1$. Reproduire ces graphiques sur la feuille.
- (d) Dans l'une des représentations graphiques précédentes on voit apparaître un maximum pour un $w > 0$.
À quelle condition sur a et b la fonction R atteint-elle un maximum en un tel $w = w_{\max} > 0$? Quelle est alors la valeur de $R = R_{\max}$ correspondante ?