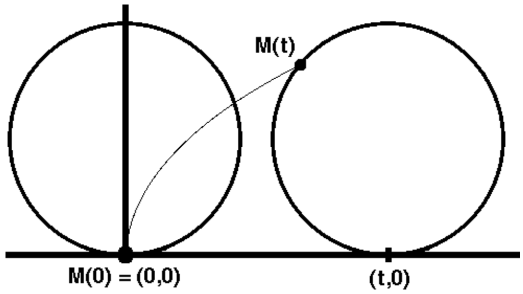
LM203 — Maxima — Laurent Koelblen

TP n^o 6 — Cercle roulant sur des courbes

1. Un cercle de rayon 1 roule sans glisser sur la droite des abscisses. Au temps t le point de contact $P(t)$ du cercle et de la droite est le point de coordonnées $(t, 0)$.



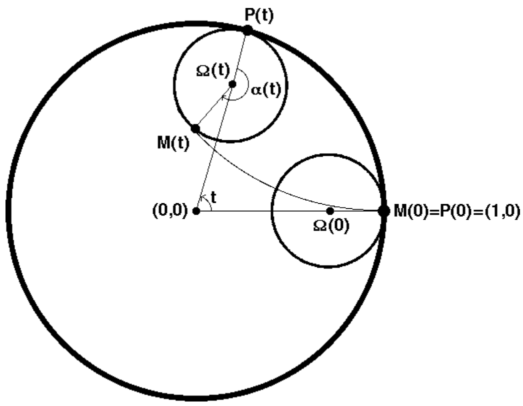
   (a) Calculer les coordonnées du point $M(t)$ attaché au cercle qui pour $t = 0$ est le point de coordonnées $(0, 0)$.

   (b) Tracer à l'aide maxima la courbe paramétrée ainsi obtenue, pour $t \in [0, 4\pi]$.

      i. Donner l'instruction à utiliser.

      ii. Reproduire le graphique sur la feuille.

2. De la même manière un cercle de rayon $r < 1$ roule sans glisser à l'intérieur du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Le point de contact $P(t)$ à l'instant t est le point de coordonnées $(\cos t, \sin t)$.



   (a) Calculer les coordonnées du centre $\Omega(t)$ du cercle à l'instant t.

   (b) Exprimer l'angle $\alpha(t)$ entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(t)P(t)}$ et $\overrightarrow{\Omega(t)M(t)}$ en fonction de t et de r. (Remarquer que la longueur de l'arc de cercle $P(0)P(t)$ est égal à t).

   (c) En déduire les coordonnées de $M(t)$.

   (d) Tracer à l'aide de maxima
      – la courbe obtenue pour $r = 1/3$
      – la courbe obtenue pour $r = 1/4$

      Reproduire les graphiques sur la feuille.

3. Plus généralement on fait rouler un cercle de rayon r sans glisser sur une courbe paramétrée quelconque donnée par $P(t) = (x(t), y(t))$.

> Quelques rappels concernant les courbes paramétrées :
> – Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}P(t)}}{\mathrm{d}t} = (x'(t), y'(t))$. est tangent à la courbe.
> – On note $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ la norme de ce vecteur.
> – Les vecteurs
> $$\vec{T}(t) = \left(\frac{x'(t)}{v(t)}, \frac{y'(t)}{v(t)}\right) \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \left(-\frac{y'(t)}{v(t)}, \frac{x'(t)}{v(t)}\right)$$
> sont les vecteurs unitaires tangent et normal à la courbe au point $P(t)$.
> – La longeur de la courbe entre le point $P(0)$ et le point $P(t)$ est égale à
> $$s(t) = \int_0^t v(u)\mathrm{d}u$$

   Le point de contact entre le cercle et la courbe est $P(t)$.
   Le point $M(t)$ est le point attaché au cercle tel que pour $t = 0$ on ait $M(0) = P(0)$.

   (a) Exprimer les coordonnées du centre du cercle $\Omega(t)$ à l'instant t en fonction de $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ et r. (Remarquer que $\overrightarrow{P(t)\Omega(t)}$ est colinéaire à $\vec{N}(t)$.)

   (b) Exprimer l'angle $\alpha(t)$ entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(t)P(t)}$ et $\overrightarrow{\Omega(t)M(t)}$ en fonction de $s(t)$ et r.

   (c) En déduire une expression des coordonnées de $M(t)$.

   (d) On pose $P(t) = (t, t^2)$. Calculer $s(t)$ à l'aide maxima.

      i. Quelle est l'instruction utilisée ?

      ii. Quel est le résultat ?

      Calculer les coordonnées de $M(t)$ puis tracer la courbe décrite par $M(t)$ pour $r = 1/4$ ($t \in [-2, 2]$). Reproduire le graphique sur la feuille.