Université Pierre et Marie Curie
Licence de Physique
Parcours Physique et ses Interfaces
LM301 Outils mathématiques

Laurent Koelblen

mis à jour le 31 janvier 2015

Table des matières

1 Éléments de calcul vectoriel **5**

1.1 Fonctions de plusieurs variables . . . 5

1.1.1 Commençons par un exemple . . . 5

1.1.2 Remarques préliminaires . . . 5

1.1.3 Dérivées partielles . . . 5

1.1.4 Différentielle . . . 6

1.1.5 Dérivées d'ordres supérieures . . . 7

1.2 Formes différentielles . . . 7

1.2.1 Définitions . . . 7

1.2.2 Formes différentielles exactes . . . 7

1.2.3 Formes différentielles fermées . . . 8

1.2.4 Intégrale d'une forme différentielle le long d'un chemin . . . 8

1.2.5 Intégrale d'une forme différentielle exacte . . . 9

1.2.6 Exemple d'une forme différentielle fermée non exacte . . . 10

1.3 Systèmes de coordonnées . . . 11

1.3.1 Coordonnées polaires . . . 11

1.3.2 Coordonnées cylindriques . . . 12

1.3.3 Coordonnées sphériques . . . 12

1.4 Champs de vecteurs . . . 13

1.4.1 Définitions et notations . . . 13

1.4.2 Élément de déplacement et gradient . . . 14

1.4.3 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'un chemin orienté . . . 15

1.4.4 Champs dérivant d'un potentiel scalaire . . . 15

1.4.5 Élément de volume et intégrales de volume . . . 15

1.4.6 Élément de surface et flux d'un champ de vecteur à travers une surface orientée . . . 16

1.4.7 Divergence d'un champ de vecteur, théorème de Green-Ostrogradski . . . 17

1.4.8 Rotationnel d'un champ de vecteurs, théorème de Stockes . . . 19

2 Matrices et diagonalisation **21**

3 Séries de Fourier **23**

3.1 Qu'est-ce qu'une série de Fourier ? . . . 23

3.2 Fabrique des formules . . . 24

3.3 Définitions et théorèmes . . . 25

3.4 Exemple . . . 27

3.5 Expression « complexe » des séries de Fourier . . . 29

4 Transformation de Fourier **31**

4.1 Qu'est-ce qu'une transformation de Fourier ? . . . 31

4.2 Fabrique des formules . . . 31

4.3 Définitions et théorèmes . . . 32

4.4 Exemples . . . 33

4.4.1 Transformation de Fourier d'un créneau centré à l'origine . . . 33

4.4.2 Transformation de Fourier d'une gaussienne . . . 34

4.5 Propriétés élémentaires de la transformation de Fourier . . . 35

4.5.1 Linéarité . . . 35

4.5.2 Translation . . . 35

4.5.3 Dilatation . . . 35

4.5.4 Intégration . . . 35

4.6 Produit de convolution et transformation de Fourier . . . 36

4.7 D'autres exemples . . . 36

4.7.1 Produit de convolution de 2 créneaux et sa transformation de Fourier . . . 36

4.7.2 Dérivation et translation . . . 38

5 « Fonction » de Dirac **39**

5.1 Une nouvelle fonction, pour quoi faire ? . . . 39

5.2 Définition et propriétés . . . 40

5.3 Exemple d'application . . . 40

5.4 Distributions à support fini . . . 41

6 Transformation de Laplace **43**

6.1 Qu'est-ce qu'une transformation de Laplace ? . . . 43

6.2 Formules . . . 43

6.3 Exemples . . . 43

6.4 Quelques propriétés . . . 44

6.5 Exemple d'application . . . 45

Chapitre 1

Éléments de calcul vectoriel

1.1 Fonctions de plusieurs variables

1.1.1 Commençons par un exemple

Un gaz parfait obéit à la « loi » $pV = nRT$ où :

— p est la pression du gaz (exprimée en pascal)
— V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube)
— n est la quantité de matière (en mole)
— R est est la constante universelle des gaz parfaits ($R = 8,3144621 \cdot J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$)
— T est la température absolue (en kelvin)

On peut ainsi exprimer un des paramètres en fonction des autres : $p = \dfrac{nRT}{V}$, $T = \dfrac{pV}{nR}$, etc.

Les expressions $\dfrac{nRT}{V}$ et $\dfrac{pV}{nR}$ sont des fonctions des variables V, n, T et p, V, n respectivement (R est une constante). Compte tenu de la nature des paramètres, on ne considère évidemment ces fonctions que sur les domaines

$$\big\{(V, n, T) \mid V > 0,\ n > 0 \text{ et } T > 0\big\} \text{ et } \big\{(p, V, n) \mid p > 0,\ V > 0 \text{ et } n > 0\big\}$$

respectivement. Cet exemple sera développé tout au long du chapitre.

1.1.2 Remarques préliminaires

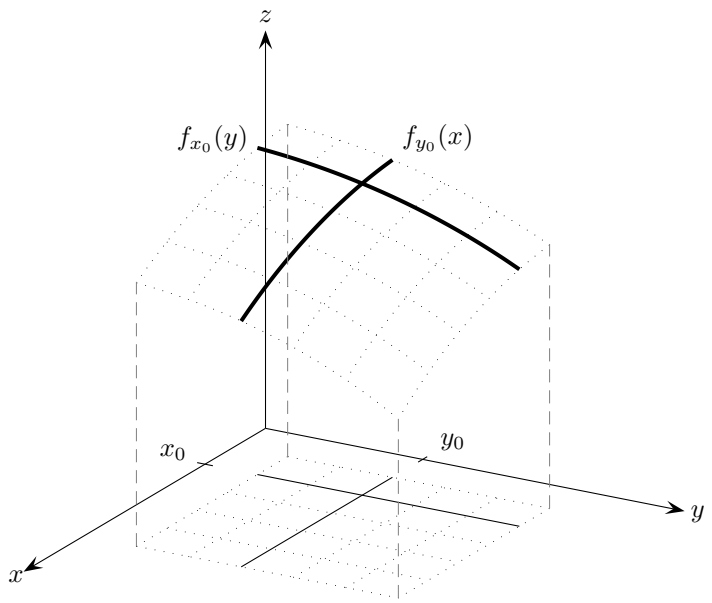
a) On notera $f(x, y)$ une fonction des 2 variables réelles x, y. Une telle fonction peut être définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mais il est fréquent que certaines valeurs soient exclues du domaine de définition comme dans l'exemple qui précède.

b) On considérera dans ce texte uniquement des fonctions « suffisamment régulières », c'est-à-dire pouvant être dérivées autant de fois que nécessaire sur leur domaine de définition.

c) Remarquons enfin que ce qui suit peut-être généralisé à des fonctions de 3 variables ou plus.

1.1.3 Dérivées partielles

Fixons $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère alors les fonctions « partielles » $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ qui dépend uniquement de la variable x, et $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ qui dépend uniquement de la variable y.



La dérivée de la fonction $f_{y_0}(x)$ en $x = x_0$ s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x en $(x, y) = (x_0, y_0)$. Elle est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

De la même manière $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la dérivée de la fonction $f_{x_0}(y)$ en $y = y_0$.

On peut considérer ces dérivées partielles pour tout (x_0, y_0). $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc également des fonctions de 2 variables.

<u>Exemple</u> : $\dfrac{\partial p}{\partial V}(V, n, T) = -\dfrac{nRT}{V^2}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial V}(p, V, n) = \dfrac{p}{nR}$.

1.1.4 Différentielle

Revenons au cas des fonctions d'une variable $f(x)$. Pour une valeur $\mathrm{d}x$ « petite », une valeur approchée de $f(x + \mathrm{d}x)$ est donnée par le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 1 :

$$f(x + \mathrm{d}x) \simeq f(x) + f'(x)\mathrm{d}x\,.$$

Autrement dit, lorsque la x subit une petite variation d'une valeur $\mathrm{d}x$, la fonction $f(x)$ varie en conséquence environ d'une valeur :

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x\,.$$

Pour une fonction de 2 variables $f(x, y)$, on a alors de la même manière, pour des valeurs $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ « petites », une expression approchée :

$$f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) \simeq f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ \mathrm{d}y\,.$$

Autrement dit, lorsque la x et y subissent des petites variations de valeurs $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$, la fonction $f(x, y)$ varie en conséquence environ d'une valeur :

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ \mathrm{d}y\,.$$

Pour alléger la notation, on écrira plus simplement :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\ \mathrm{d}y\,.$$

Cette expression $\mathrm{d}f$ est appelée la différentielle de la fonction f.

<u>Exemple</u> : $\mathrm{d}p = -\dfrac{nRT}{V^2}\mathrm{d}V + \dfrac{RT}{V}\mathrm{d}n + \dfrac{nR}{V}\mathrm{d}T$

1.1.5 Dérivées d'ordres supérieures

Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ étant elles-même des fonctions de 2 variables, elles admettent également des dérivées partielles. On notera ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

qui ne sont autres que les dérivées secondes $f''_x(y)$ et $f''_y(x)$ des fonctions partielles. Mais il y a également :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$$

qui ne peuvent pas être exprimées à partir des fonctions partielles.

Le résultat qui suit, donné sans démonstration, peut paraître élémentaire, mais il est fondamental.

Théorème 1.1 Si les 4 fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

<u>Attention</u> : la notion de continuité pour les fonctions de 2 ou de plusieurs variables est plus complexe que pour les fonctions d'une seule variable. Nous y reviendrons un peu plus loin dans ce texte. Toutefois, les fonctions qui ne vérifient pas les hypothèses de ce théorème sont des petits « monstres mathématiques » que l'on ne rencontrent pas dans les formules usuelles des sciences de la matière.

<u>Exemple</u> : on a d'une part $\dfrac{\partial p}{\partial V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$ d'où $\dfrac{\partial^2 p}{\partial V \partial T} = -\dfrac{nR}{V^2}$, et d'autre part $\dfrac{\partial p}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}$ d'où $\dfrac{\partial^2 p}{\partial T \partial V} = -\dfrac{nR}{V^2}$. On a bien l'égalité $\dfrac{\partial^2 p}{\partial V \partial T} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial T \partial V}$.

1.2 Formes différentielles

1.2.1 Définitions

La définition de la différentielle d'une fonction nous amène à considérer de manière plus générale des « formes différentielles »

$$\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des fonctions de 2 variables. (La définition s'étend évidemment à des formes différentielles de 3 variables ou plus.)

1.2.2 Formes différentielles exactes

S'il existe une fonction f telle que $\omega = \mathrm{d}f$, c'est à dire telle que $P = \dfrac{\partial f}{\mathrm{d}x}$ et $Q = \dfrac{\partial f}{\mathrm{d}y}$, on dit que la forme différentielle ω est exacte.

Remarquons que dans ce cas, on a :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\mathrm{d}y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial Q}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial P}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial Q}{\mathrm{d}x}$$

1.2.3 Formes différentielles fermées

La remarque précédente nous amène à introduire la définition suivante : si $\dfrac{\partial P}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\partial Q}{\mathrm{d}x}$ on dira que la forme différentielle ω est fermée.

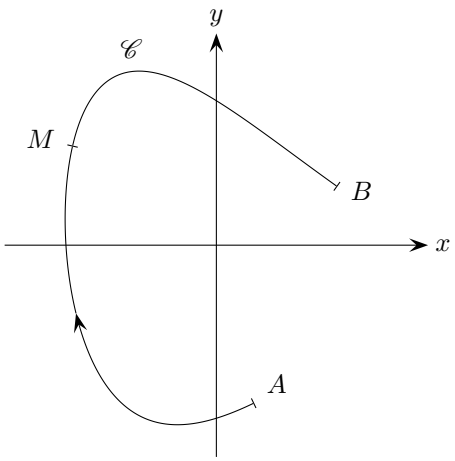
Une forme différentielle à 3 variables $\omega = P(x,y,z)\ \mathrm{d}x + Q(x,y,z)\ \mathrm{d}y + R(x,y,z)\ \mathrm{d}z$ est fermée si toutes les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial P}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial Q}{\mathrm{d}x} \quad , \quad \frac{\partial P}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial R}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial R}{\mathrm{d}y}$$

Il résulte de ce qui précède qu'une forme exacte est nécessairement fermée, mais le contraire peut être faux. Un exemple est donné plus loin.

1.2.4 Intégrale d'une forme différentielle le long d'un chemin

Considérons un chemin orienté $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^2$, d'un point $A = (x_A, y_A)$ à un point $B = (x_B, y_B)$. Un point général M de $\mathscr{C}$ a pour coordonnées $(x_M, y_M) = \big(x(t), y(t)\big)$ où $t \in [a,b]$.



Si $\omega = P(x,y)\ \mathrm{d}x + Q(x,y)\ \mathrm{d}y$ est une forme différentielle, on a le long de $\mathscr{C}$:

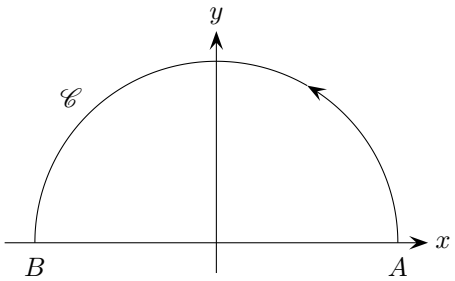
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{d}x = x'(t)\ \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = y'(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \omega_{|\mathscr{C}} = \Big(P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\ \mathrm{d}t$$

L'intégrale de ω le long de $\mathscr{C}$ est :

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_a^b \Big(P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\ \mathrm{d}t$$

Le calcul se ramène ainsi à l'intégrale d'une fonction d'une variable.

<u>Exemple</u> : soit $\omega = y\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}y$ et $\mathscr{C}$ le demi-cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans le demi-plan $y > 0$, orienté dans le sens trigonométrique.



Un point général M de $\mathscr{C}$ a pour coordonnées $(x_M, y_M) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0,\pi]$. On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{d}x = -\sin t\ \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = \ \ \cos t\ \mathrm{d}t \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \omega_{|\mathscr{C}} = \Big(\sin t\cdot(-\sin t) - \cos t\cdot\cos t\Big)\ \mathrm{d}t = -\ \mathrm{d}t$$

Ce qui donne :

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_0^{\pi} - \,\mathrm{d}t = \big[-t\big]_0^{\pi} = -\pi$$

Il convient de remarquer que la façon de paramétrer la courbe ne change pas le résultat. C'est une conséquence du théorème de changement de variables dans les intégrales d'une fonction d'une variable. La démonstration est laissée au lecteur à titre d'exercice. Illustrons cela sur l'exemple qui précède.

Le demi-cercle peut également être paramétré de la façon suivante : $(x_M, y_M) = \big(x(t), y(t)\big) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ avec $t \in [0, +\infty]$ On a alors :

$$\begin{cases} \mathrm{d}x &= \dfrac{(-2t)\cdot(1+t^2)-(1-t^2)\cdot(2t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \dfrac{-2y(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= \dfrac{(2)\cdot(1+t^2)-(2t)\cdot(2t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \dfrac{2x(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

d'où

$$\omega_{|\mathscr{C}} = \frac{-2y(t)^2 - 2x(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(on rappelle que } x(t)^2 + y(t)^2 = 1\text{)}$$

ce qui donne :

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = -2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -2\big[\arctan t\big]_0^{+\infty} = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$$

1.2.5 Intégrale d'une forme différentielle exacte

Nous savons déjà que pour une fonction d'une variable $g(t)$ on a, si $g(t) = G'(t)$: $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$. Le résultat qui suit en est une généralisation aux intégrales des formes différentielles exactes.

Théorème 1.2 Si $\omega = \mathrm{d}f$ est une forme différentielle exacte et si $\mathscr{C}$ est un chemin orienté d'un point $A = (x_A, y_A)$ à un point $B = (x_B, y_B)$, alors $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \omega = f(B) - f(A)$.

Voici une preuve de ce résultat : si $\omega = \mathrm{d}f$, alors $\omega_{|\mathscr{C}} = g(t)\,\mathrm{d}t$ avec :

$$g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\cdot y'(t)$$

il suffit alors de remarquer que $g(t)$ n'est autre que la dérivée de la fonction :

$$G(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$$

Ceci se déduit des relations :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x &= x'(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\,\mathrm{d}t \\ \text{d'où}\quad \mathrm{d}G &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(t)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

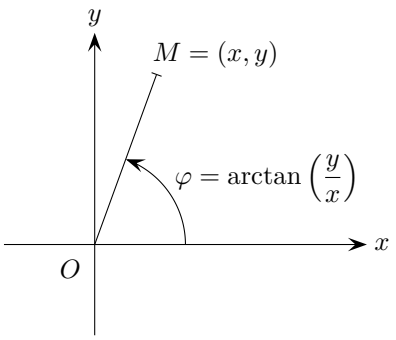
On a donc bien $G'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot y'(t) = g(t)$.

L'intégrale de ω le long de $\mathscr{C}$ est donc $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) = f(B) - f(A)$.

1.2.6 Exemple d'une forme différentielle fermée non exacte

L'exemple est basé sur la construction suivante : si $M = (x, y)$ est un point du demi-plan $x > 0$, l'angle φ entre l'axe $0x$ et la droite (OM) est donnée par $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Attention : cette expression n'est valable que pour $x > 0$ et la valeur de φ ainsi déterminée appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.



Sur le domaine $x > 0$ on a $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$

Cette forme, qui est exacte sur le domaine $x > 0$, se prolonge sur le domaine $(x, y) \neq (0, 0)$ en une forme $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$.

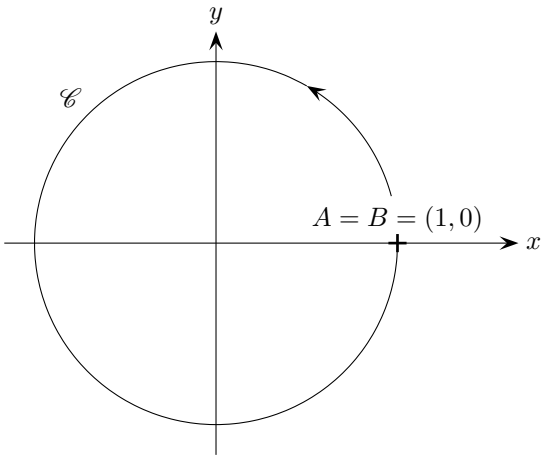
Il est naturel de penser que cette forme n'est pas exacte sur le domaine $(x, y) \neq (0, 0)$, car si elle l'était, on en déduirait une définition unique de l'angle φ pour tout point $M \neq (0, 0)$, mais on sait bien qu'en effectuant un tour complet autour du point O, et en revenant au point de départ, l'angle augmente de 2π et que φ n'est donc pas défini de façon unique mais seulement « modulo 2π ». En voici la preuve rigoureuse.

Tout d'abord, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & = & \dfrac{-(x^2 + y^2) - (-y) \cdot (2y)}{(x^2 + y^2)^2} \quad = \quad \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \text{et} & \dfrac{\partial Q}{\partial x} & = & \dfrac{(x^2 + y^2) - x \cdot (2x)}{(x^2 + y^2)^2} \quad = \quad \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{array}$$

La forme ω est donc fermée.

Calculons maintenant l'intégrale de ω le long du cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique. Le point général de $\mathscr{C}$ a pour coordonnées $(\cos t, \sin t)$ où $t \in [0, 2\pi]$.



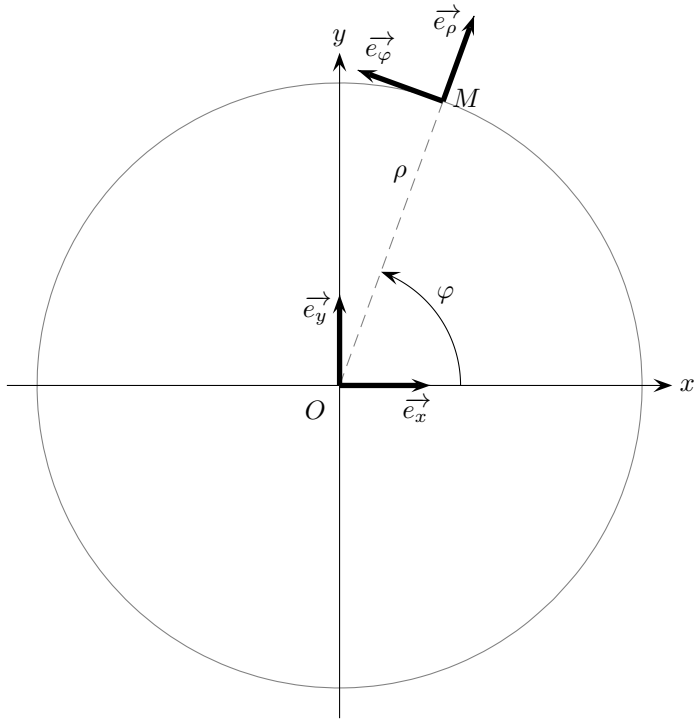
On a $\omega_{|\mathscr{C}} = \left(\dfrac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \dfrac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t\right)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$ d'où $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$.

Si ω était exacte, on aurait $\omega = \mathrm{d}f$ pour une certaine fonction f, et alors $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \omega$ serait égal à $f(B) - f(A)$ qui est nul car $B = A$.

Conclusion : la forme ω est fermée, mais n'est pas exacte.

1.3 Systèmes de coordonnées

1.3.1 Coordonnées polaires



Un point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ du plan peut également être repéré par la distance $\rho = OM$ et l'angle φ que fait la droite (OM) avec l'axe Ox.

Les grandeurs (ρ, φ) s'appellent les coordonnées polaire de M.

Attention : l'angle φ n'est pas défini de façon unique. Les couples (ρ, φ) et $(\rho, \varphi + 2\pi)$ désignent le même point. On dit que φ est défini « à 2π près » ou « modulo 2π ».

Les grandeurs (x, y) et (ρ, φ) sont liés par les relations suivantes :

a) $x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi$

b) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \tan\varphi = \dfrac{y}{x}, \quad$ etc.

On attache de plus au point M le repère local $(M, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ défini de la manière suivante :

a) lorsque φ est fixé, le point M de coordonnées polaires (ρ, φ) se déplace le long d'une demi-droite d'extrémité O. Le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ est le vecteur unitaire (c'est-à-dire de longueur 1) qui dirige cette demi-droite et orienté dans le sens de croissance de ρ.

b) lorsque ρ est fixé, le point M de coordonnées polaires (ρ, φ) se déplace le long d'un cercle (centré en O). Le vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$ est le vecteur unitaire tangent à ce cercle et orienté dans le sens de croissance de φ.

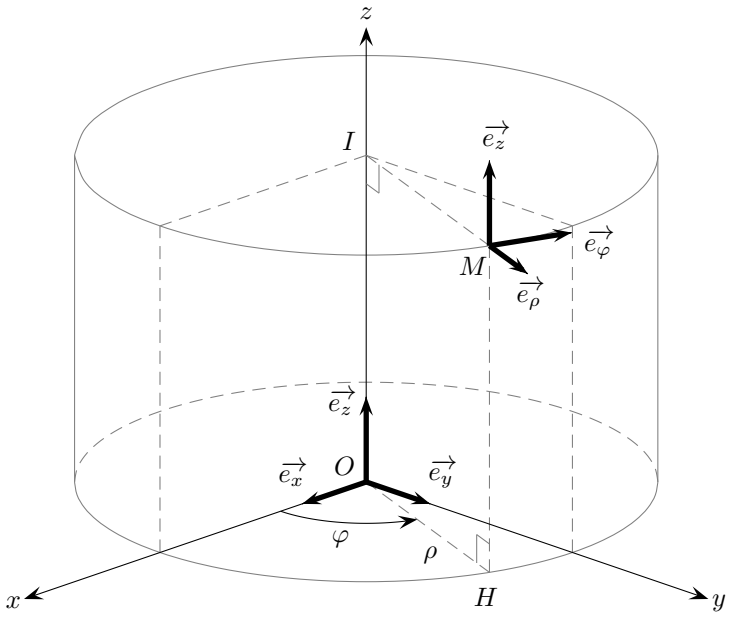
Les vecteurs $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ sont liés par les relations suivantes :

a) $\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi \overrightarrow{e_x} + \sin\varphi \overrightarrow{e_y}, \quad \overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi \overrightarrow{e_x} + \cos\varphi \overrightarrow{e_y}$

b) $\overrightarrow{e_x} = \cos\varphi \overrightarrow{e_\rho} - \sin\varphi \overrightarrow{e_\varphi}, \quad \overrightarrow{e_y} = \sin\varphi \overrightarrow{e_\rho} + \cos\varphi \overrightarrow{e_\varphi}$

On remarque enfin que $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ sont orthogonaux et que $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ sont orientés dans le même sens (appelé sens trigonométrique ou sens direct).

1.3.2 Coordonnées cylindriques

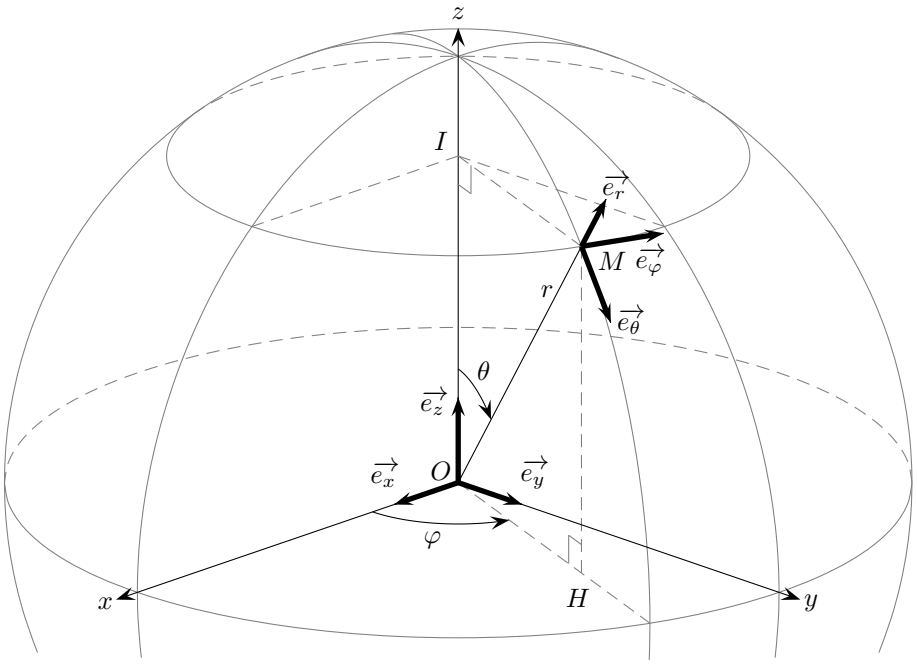


Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, H la projection orthogonale de M sur le plan Oxy et (ρ, φ) les coordonnées polaire de H.

Les grandeurs (ρ, φ, z) s'appelle les coordonnées cylindriques de M.

On attache de plus au point M le repère local $(M, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$.

1.3.3 Coordonnées sphériques



Le M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ peut également être repéré par la distance $r = OM$, l'angle θ que fait la droite (OM) avec l'axe Oz, et l'angle φ que fait la droite (OH) avec l'axe Ox (où H désigne la projection orthogonale de M sur le plan Oxy).

Les grandeurs (r, θ, φ) s'appellent les coordonnées sphériques de M.

L'angle θ appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

L'angle φ est défini à 2π près (et n'est pas défini pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$).

Les grandeurs (x, y, z) et (r, θ, φ) sont liées par les relations suivantes :

a) $x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$

b) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$
$\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad$ etc.

On attache de plus au point M le repère local $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ défini de la manière suivante :

a) lorsque θ et φ sont fixé, le point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) se déplace le long d'une demi-droite d'extrémité O. Le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire qui dirige cette demi-droite et orienté dans le sens de croissance de r.

b) lorsque r et φ sont fixé, le point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) se déplace le long d'un cercle (centré en O). Le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur unitaire tangent à ce cercle et orienté dans le sens de croissance de θ.

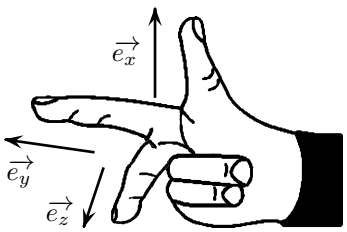
c) lorsque r et θ sont fixé, le point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) se déplace le long d'un cercle (dans un plan parallèle à Oxy et centré en I, où I est la projection orthogonale de M sur l'axe Oz). Le vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$ est le vecteur unitaire tangent à ce cercle et orienté dans le sens de croissance de φ.

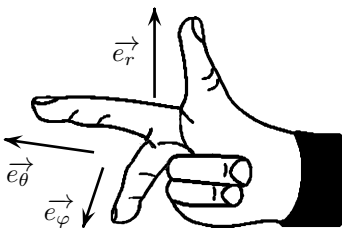
Les vecteurs $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ sont liés par les relations suivantes :

a) $\overrightarrow{e_r} = \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z}, \quad \overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\overrightarrow{e_z}, \quad \overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y}$

b) $\overrightarrow{e_x} = \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_\theta} - \sin\varphi\overrightarrow{e_\varphi}, \quad \overrightarrow{e_y} = \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_\theta} + \cos\varphi\overrightarrow{e_\varphi}, \quad \overrightarrow{e_z} = \cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$

On remarque enfin que $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ sont orthogonaux 2 à 2 et que $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ sont orientés dans le même sens, selon la règle dite « des 3 doigts de la main droite », pouce, index et majeur, qui définisse le sens direct).





1.4 Champs de vecteurs

1.4.1 Définitions et notations

Nous considérerons ici uniquement le cas des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Certaines notions, comme le gradient ou la divergence, se généralisent en toutes dimensions, d'autres notions, comme le rotationnel, non.

Un champs de vecteur $\overrightarrow{E}$ sur $\mathbb{R}^3$ (ou sur un domaine de $\mathbb{R}^3$) est la donnée, en chaque point M, d'un vecteur $\overrightarrow{E}(M)$.

On peut exprimer $\overrightarrow{E}(M)$ dans les différents systèmes de coordonnées. On notera ainsi :

a) en coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{E}(M) = E_x(x,y,z)\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y,z)\overrightarrow{e_y} + E_z(x,y,z)\overrightarrow{e_z}$,

b) en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{E}(M) = E_\rho(\rho,\varphi,z)\overrightarrow{e_\rho} + E_\varphi(\rho,\varphi,z)\overrightarrow{e_\varphi} + E_z(\rho,\varphi,z)\overrightarrow{e_z}$,

c) en coordonnées sphériques, $\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$.

1.4.2 Élément de déplacement et gradient

a) En coordonnées cartésiennes, lorsque les coordonnées (x, y, z) d'un point M subissent des petites variations de valeurs $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, le point subit un déplacement dit élémentaire selon le vecteur

$$\overrightarrow{dM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}\,.$$

On définit alors par la relation suivante le champ de vecteurs gradient d'une fonction f :

$$(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f).\,\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}f\,.$$

De l'écriture de $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$ et de la définition de $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ on déduit immédiatement que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}\,.$$

b) En coordonnées cylindriques :
- Une petite variation du paramètre ρ de valeur $\mathrm{d}\rho$ entraîne un déplacement élémentaire selon le vecteur $\mathrm{d}\rho\,\overrightarrow{e_\rho}$.
- Une petite variation du paramètre φ de valeur $\mathrm{d}\varphi$ entraîne un déplacement élémentaire selon le vecteur $\rho\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$. (Le facteur ρ présent ici s'explique par le fait que lorsque φ varie, le point M se déplace sur un cercle de rayon ρ auquel le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ est tangent. La variation de longueur est obtenue en multipliant la variation de l'angle par le rayon du cercle, d'où le résultat.)
- Une petite variation du paramètre z de valeur $\mathrm{d}z$ entraîne un déplacement élémentaire selon le vecteur $\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$.

Le déplacement élémentaire est donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$$

Par ailleurs, l'expression de $\mathrm{d}f$ est :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

d'où l'on déduit que le gradient d'une fonction f est :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\overrightarrow{e_z}\,.$$

c) De la même manière, en coordonnées sphérique :
- Une petite variation du paramètre r de valeur $\mathrm{d}r$ entraîne un déplacement élémentaire selon le vecteur $\mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r}$.
- Une petite variation du paramètre θ de valeur $\mathrm{d}\theta$ entraîne un déplacement élémentaire selon le vecteur $r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$. (Lorsque θ varie, le point M se déplace sur un cercle de rayon r auquel $\overrightarrow{e_\theta}$ est tangent.)
- Une petite variation du paramètre φ de valeur $\mathrm{d}\varphi$ entraîne un déplacement élémentaire selon le vecteur $r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$. (Lorsque φ varie, le point M se déplace sur un cercle de rayon $\rho = r\sin\theta$ auquel $\overrightarrow{e_\varphi}$ est tangent.)

Le déplacement élémentaire est donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Par ailleurs, l'expression de $\mathrm{d}f$ est :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

d'où l'on déduit que le gradient d'une fonction f est :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}\,.$$

1.4.3 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'un chemin orienté

Reprenons la formule de l'intégrale d'une forme différentielle le long d'un chemin orienté, exprimée en coordonnées cartésiennes : si $\omega = E_x(x,y,z)\,\mathrm{d}x + E_y(x,y,z)\,\mathrm{d}y + E_z(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ et si $\mathscr{C}$ est un chemin orienté dans $\mathbb{R}^3$, paramétré par $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ où $t \in [a,b]$, alors :

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_a^b \Big(E_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t) + E_y\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t) + E_z\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

que l'on peut écrire plus simplement :

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

où $\overrightarrow{E}$ est le champs de vecteur défini par :

$$\overrightarrow{E} = E_x(x,y,z)\,\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y,z)\,\overrightarrow{e_y} + E_z(x,y,z)\,\overrightarrow{e_z}$$

et où $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ est le déplacement élémentaire que subit un point $M \in \mathscr{C}$ lorsque le paramètre t varie d'une petite valeur $\mathrm{d}t$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \big(x'(t)\,\overrightarrow{e_x} + y'(t)\,\overrightarrow{e_y} + z'(t)\,\overrightarrow{e_z}\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Nous définissons donc la circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{E}$ le long de $\mathscr{C}$ par la formule :

$$\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

1.4.4 Champs dérivant d'un potentiel scalaire

On dit qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel scalaire, s'il existe une fonction f (appelée aussi potentiel scalaire) telle que

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\,.$$

Dans ce cas, si $\mathscr{C}$ est un chemin orienté dans $\mathbb{R}^3$ paramétré par $M(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ où $t \in [a,b]$, et si $A = M(a)$ et $B = M(b)$, alors la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long de $\mathscr{C}$ est :

Théorème 1.3

$$\int_{\mathscr{C}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = f(B) - f(A)$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit d'utiliser la correspondance entre formes différentielles et champs de vecteurs introduite en 1.4.3 et d'appliquer le théorème 1.2 page 9.

1.4.5 Élément de volume et intégrales de volume

Un élément de volume $\mathrm{d}V$ dans un système de coordonnées est la mesure d'un volume délimité par les vecteurs de déplacements élémentaires suivant chacun des paramètres.

En coordonnées cartésiennes, les vecteurs de déplacements élémentaires suivant (x,y,z) sont $\big(\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}x, \overrightarrow{e_y}\,\mathrm{d}y, \overrightarrow{e_z}\,\mathrm{d}z\big)$ qui délimitent un volume élémentaire de mesure :

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

En coordonnées cylindrique, les vecteurs de déplacements élémentaires suivant (ρ,φ,z) sont $\big(\overrightarrow{e_\rho}\,\mathrm{d}\rho, \rho\,\overrightarrow{e_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \overrightarrow{e_z}\,\mathrm{d}z\big)$ qui délimitent un volume élémentaire de mesure :

$$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,.$$

En coordonnées sphériques, les vecteurs de déplacements élémentaires suivant (r,θ,φ) sont $\big(\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}r, r\,\overrightarrow{e_\theta}\,\mathrm{d}\theta, r\sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\big)$ qui délimitent un volume élémentaire de mesure :

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Suivant le calcul à faire, un de ces éléments de volume sera plus adapté que les autres.

<u>Exemple</u> : la mesure du volume d'un domaine V est donnée simplement par l'intégrale :

$$\iiint_V \mathrm{d}V$$

Si V est la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon R, le calcul en coordonnées cartésiennes s'effectue ainsi :

— x varie de $-R$ à R,
— y varie de $-\sqrt{R^2-x^2}$ à $\sqrt{R^2-x^2}$,
— z varie de $-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ à $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

d'où :

$$\iiint_V \mathrm{d}V = \int_{x=-R}^{x=R} \left(\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_{z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Il est assez évident que le système de coordonnées cartésiennes n'est pas adapté à ce calcul !

En coordonnées sphériques, c'est beaucoup plus simple :

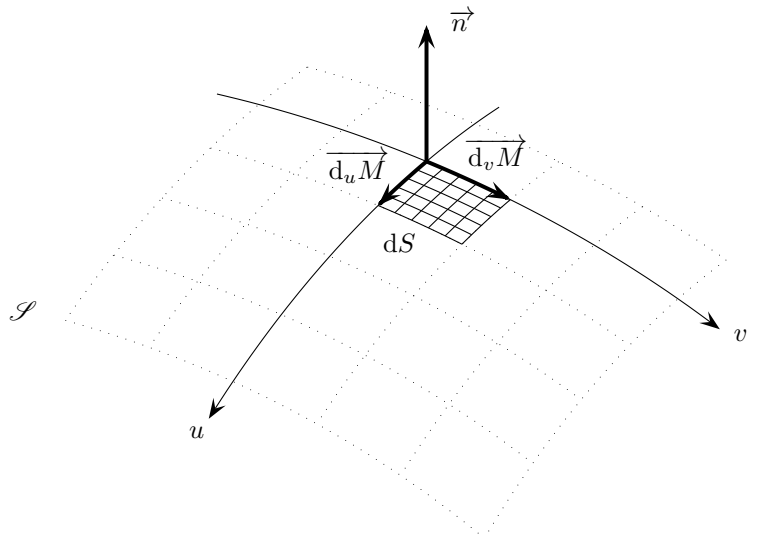
— r varie de 0 à R,
— θ varie de 0 à π,
— φ varie de 0 à 2π.

d'où :

$$\begin{aligned}
\iiint_V \mathrm{d}V &= \int_{r=0}^{r=R} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{r=R} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi \right) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) r^2 \, \mathrm{d}r \\
&= \left(\int_{r=0}^{r=R} r^2 \, \mathrm{d}r \right) \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \right) \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi \right) = \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

1.4.6 Élément de surface et flux d'un champ de vecteur à travers une surface orientée

Considérons une surface $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^3$ dont le point général $M = M(u,v)$ dépend de 2 paramètres (u,v).



Lorsque les paramètres (u,v) varient respectivement dans des intervalles $[u, u+\mathrm{d}u]$ et $[v, v+\mathrm{d}v]$, le point M recouvre un élément de surface $\mathrm{d}S$, en forme de parallélogramme (hachuré sur le dessin), engendré par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{d}_u M} = \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}\mathrm{d}u$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}_v M} = \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\mathrm{d}v$.

L'aire de cet élément de surface est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}_u M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}_v M} = \left(\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ (où $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$).

On a coutume de désigner par $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}_u M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}_v M}$.

On a ainsi $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S$ où $\overrightarrow{n}$ désigne le vecteur normal à $\mathscr{S}$ (orienté dans le même sens que $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$).

Le flux d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$ à travers la surface $\mathscr{S}$ est définie par la formule :

$$\iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Si la surface $\mathscr{S}$ est recouverte par les points $M(u,v)$ avec $u \in [u_0, u_1]$ et $v \in [v_0, v_2]$, le calcul du flux de $\overrightarrow{E}$ à travers $\mathscr{S}$ se ramène à celui d'une intégrale double usuelle :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} &= \int_{u=u_0}^{u=u_1} \int_{v=v_0}^{v=v_1} \overrightarrow{E}(M).(\overrightarrow{\mathrm{d}_u M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}_v M}) \\
&= \int_{u=u_0}^{u=u_1} \int_{v=v_0}^{v=v_1} \overrightarrow{E}(M).\left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{u=u_0}^{u=u_1} \int_{v=v_0}^{v=v_1} \text{dét}\left(\overrightarrow{E}(M)\,,\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}, \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

(La dernière égalité découle de la relation : $\overrightarrow{v_1}.(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}) = \text{dét}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$, valable pour tout triplet de vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$)

1.4.7 Divergence d'un champ de vecteur, théorème de Green-Ostrogradski

La divergence d'un champ de vecteur $\overrightarrow{E}$ est un champ de scalaires noté div $\overrightarrow{E}$. Il est défini par la propriété suivante :

Théorème 1.4 — Green-Ostrogradski

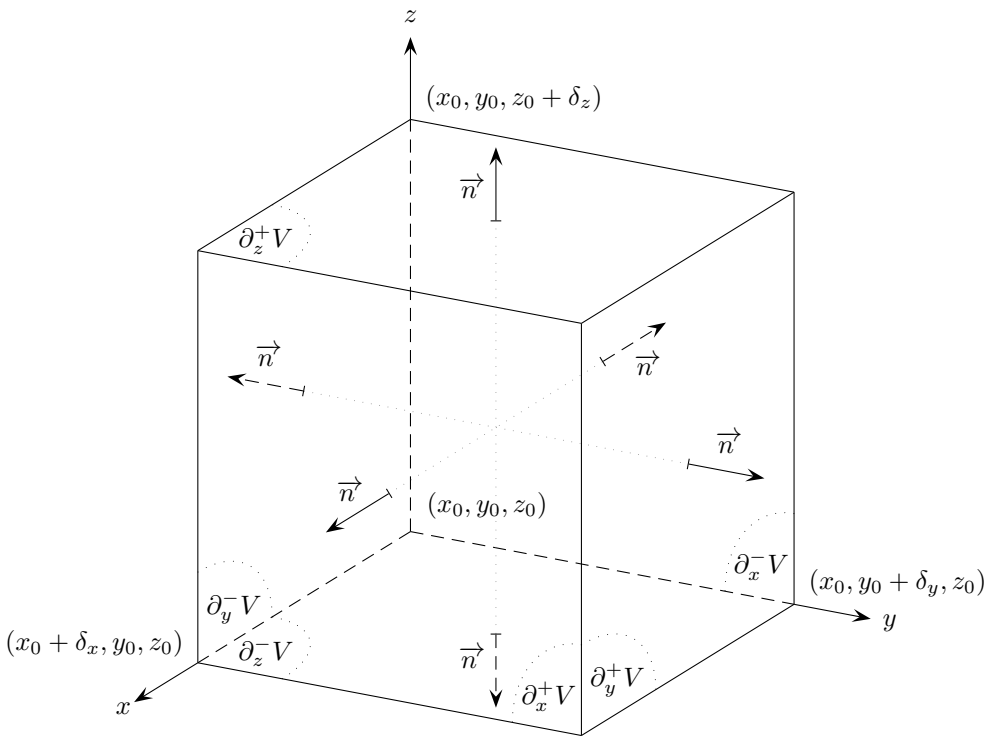
Soit $\overrightarrow{E}$ un champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^3$ et V un volume (de taille bornée) de $\mathbb{R}^3$ délimité par une surface notée ∂V (et appelée le bord de V). En chaque point de ∂V on désigne par $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal à ∂V orienté vers l'extérieur de V. On a :

$$\iiint_V \text{div}\,\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S$$

De cette formule on peut déduire l'expression de div $\overrightarrow{E}$ dans les différents systèmes de coordonnées.

Voici comment raisonner en coordonnées cartésiennes : on considère le volume $V = [x_0, x_0+\delta_x] \times [y_0, y_0+\delta_y] \times [z_0, z_0+\delta_z]$ de $\mathbb{R}^3$, où δ_x, δ_y et δ_z sont « petits ». V est parallélépipède rectangle. Son bord ∂V est la réunion de 6 rectangles :

$$\begin{aligned}
\partial_x^- V &= \{x_0\} \times [y_0, y_0+\delta_y] \times [z_0, z_0+\delta_z] \\
\partial_x^+ V &= \{x_0+\delta_x\} \times [y_0, y_0+\delta_y] \times [z_0, z_0+\delta_z] \\
\partial_y^- V &= [x_0, x_0+\delta_x] \times \{y_0\} \times [z_0, z_0+\delta_z] \\
\partial_y^+ V &= [x_0, x_0+\delta_x] \times \{y_0+\delta_y\} \times [z_0, z_0+\delta_z] \\
\partial_z^- V &= [x_0, x_0+\delta_x] \times [y_0, y_0+\delta_y] \times \{z_0\} \\
\partial_z^+ V &= [x_0, x_0+\delta_x] \times [y_0, y_0+\delta_y] \times \{z_0+\delta_z\}
\end{aligned}$$



Le vecteur normal à ∂V est :

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{e_x} \text{ sur la face } \partial_x^+ V & \overrightarrow{e_y} \text{ sur la face } \partial_y^+ V & \overrightarrow{e_z} \text{ sur la face } \partial_z^+ V \\ -\overrightarrow{e_x} \text{ sur la face } \partial_x^- V & -\overrightarrow{e_y} \text{ sur la face } \partial_y^- V & -\overrightarrow{e_z} \text{ sur la face } \partial_z^- V \end{array}$$

Par ailleurs, comme δ_x, δ_y et δ_z sont « petits », on peut considérer que le champ de vecteur $\overrightarrow{E}$ est constant sur chacune des faces du parallélépipède ∂V.

Enfin on décompose $\overrightarrow{E}$ suivant les vecteurs du repère cartésien : $\overrightarrow{E} = E_x\overrightarrow{e_x} + E_y\overrightarrow{e_y} + E_z\overrightarrow{e_z}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\partial_x^- V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S &= \int_{y=y_0}^{y=y_0+\delta_y}\int_{z=z_0}^{z=z_0+\delta_z} \overrightarrow{E}(x_0,y,z).(-\overrightarrow{e_x})\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ &= \int_{y=y_0}^{y=y_0+\delta_y}\int_{z=z_0}^{z=z_0+\delta_z} -E_x(x_0,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ &\simeq -E_x(x_0,y_0,z_0)\delta_y\delta_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\partial_x^+ V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S &= \int_{y=y_0}^{y=y_0+\delta_y}\int_{z=z_0}^{z=z_0+\delta_z} \overrightarrow{E}(x_0+\delta_x,y,z).(\overrightarrow{e_x})\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ &= \int_{y=y_0}^{y=y_0+\delta_y}\int_{z=z_0}^{z=z_0+\delta_z} E_x(x_0+\delta_x,y,z)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\ &\simeq E_x(x_0+\delta_x,y_0,z_0)\delta_y\delta_z \end{aligned}$$

d'où :

$$\iint_{\partial_x^+ V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S + \iint_{\partial_x^- V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S \simeq \big(E_x(x_0+\delta_x,y_0,z_0) - E_x(x_0,y_0,z_0)\big)\delta_y\delta_z$$

or :

$$E_x(x_0+\delta_x,y_0,z_0) - E_x(x_0,y_0,z_0) \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\delta_x$$

donc :

$$\iint_{\partial_x^+ V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S + \iint_{\partial_x^- V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\delta_x\delta_y\delta_z$$

et on a de la même manière :

$$\iint_{\partial_y^+ V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S + \iint_{\partial_y^- V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S \simeq \frac{\partial E_y}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\delta_x\delta_y\delta_z$$

$$\iint_{\partial_z^+ V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S + \iint_{\partial_z^- V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S \simeq \frac{\partial E_z}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\delta_x\delta_y\delta_z$$

En additionnant les 3 égalités qui précède, on obtient :

$$\iint_{\partial V} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S \simeq \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)\delta_x\delta_y\delta_z.$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathrm{div}\ \overrightarrow{E}\ \mathrm{d}V &\simeq \iiint_V (\mathrm{div}\ \overrightarrow{E})(x_0,y_0,z_0)\ \mathrm{d}V \\ &= (\mathrm{div}\ \overrightarrow{E})(x_0,y_0,z_0)\iiint_V \mathrm{d}V \\ &= (\mathrm{div}\ \overrightarrow{E})(x_0,y_0,z_0)\delta_x\delta_y\delta_z. \end{aligned}$$

Par identification des deux expressions qui précèdent, on obtient la formule :

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

1.4.8 Rotationnel d'un champ de vecteurs, théorème de Stockes

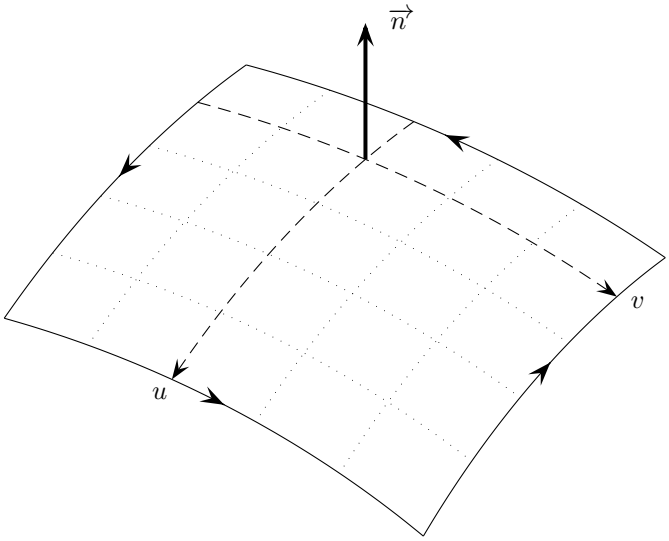
Le rotationnel d'un champ de vecteur $\overrightarrow{E}$ est un champ de vecteurs noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}$. Il est défini par la propriété suivante :

Théorème 1.5 — Stockes

Soit $\overrightarrow{E}$ un champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{S}$ une surface (de taille bornée) de $\mathbb{R}^3$ délimité par une courbe notée $\partial\mathscr{S}$ (et appelée le bord de $\mathscr{S}$). On a :

$$\iint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\mathscr{S}} = \int_{\partial\mathscr{S}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

On choisira d'orienter simultanément la surface $\mathscr{S}$ et son bord $\partial\mathscr{S}$ de la manière suivante. Si le point général de $\mathscr{S}$ est $M = M(u,v)$ avec $u \in [u_0, u_1]$ et $v \in [v_0, v_1]$, on a déjà vu qu'on oriente la surface $\mathscr{S}$ en prenant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à $\mathscr{S}$ en $M(u,v)$ le vecteur de même sens que $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$. Par ailleurs, cela identifie $\mathscr{S}$ à un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et $\partial\mathscr{S}$ au bord de ce rectangle. On choisit alors l'orientation directe sur le bord de ce rectangle ce qui détermine l'orientation de $\partial\mathscr{S}$.



De la formule de Stockes on peut déduire l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}$ dans les différents systèmes de coordonnées.

On trouve ainsi en coordonnée cartésiennes, pour $\overrightarrow{E} = E_x\overrightarrow{e_x} + E_y\overrightarrow{e_y} + E_z\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Chapitre 2

Matrices et diagonalisation

À compléter.

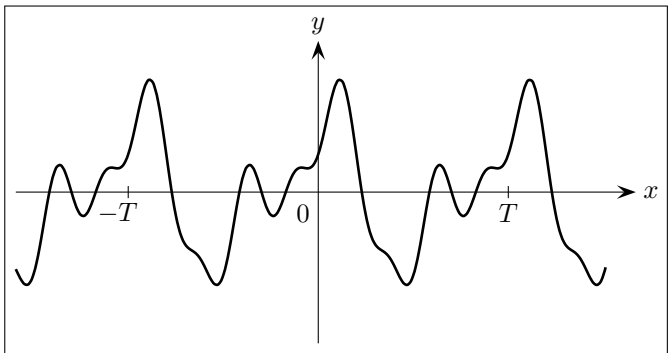
Chapitre 3

Séries de Fourier

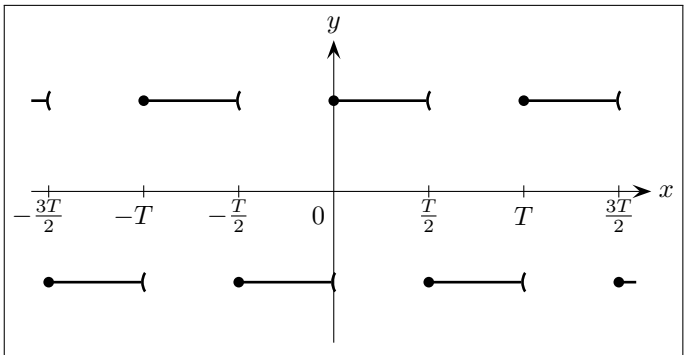
3.1 Qu'est-ce qu'une série de Fourier ?

On considère une fonction $f(t)$ définie sur $\mathbb{R}$, périodique de <u>période</u> T (c'est à dire telle que $f(t+T) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) et qui prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$.

On simplifie souvent l'écriture en remplaçant l'expression « périodique de période T » par « T-périodique ».



une fonction périodique



un « signal carré » périodique

On supposera pour l'instant que cette fonction est « suffisament régulière », sans préciser pour le moment le sens de cette expression. On reviendra sur ce point ultérieurement.

Si la fonction $f(t)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, elle peut représenter une grandeur physique, comme par exemple la valeur de la pression en un point précis de l'air que traverse une onde sonore. L'expérience nous apprend qu'un telle onde a une composante dite « fondamentale » (un signal sinusoïdal de période T, donc de <u>fréquence</u> $\nu = \dfrac{1}{T}$) et des composantes dites « harmoniques » (des signaux sinusoïdaux de périodes, $\dfrac{T}{2}$, $\dfrac{T}{3}$, etc., c'est à dire de fréquence 2ν, 3ν, etc.), chacune ayant une amplitude propre.

Un signal sinusoïdal de période T est représenté mathématiquement par une fonction $\cos\Big(\dfrac{2\pi}{T}t + \varphi\Big) = \cos(\omega t + \varphi)$, où l'on a posé $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Le coefficient ω s'appelle la <u>pulsation</u> du signal et le coefficient φ sa phase. La décomposition du signal sonore correspond à la décomposition de la fonction $f(t)$ comme somme d'une constante et de fonctions sinusoïdales dont les pulsations sont multiples de $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et ayant chacune une amplitude et une phase propres :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Les formules trigonométriques nous permette de remplacer cette écriture par la suivante, où l'on a posé $a_n = A_n \cos\varphi_n$ et $b_n = -A_n \sin\varphi_n$:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big)$$

3.2 Fabrique des formules

Supposons la décomposition donnée précédemment soit possible mathématiquement. On se pose alors la question de la détermination des coefficients a_0, a_n et b_n. On va le faire grâce aux calculs suivants.

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big)\right]\,\mathrm{d}t \\ &= a_0\int_0^T \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_0^T\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + b_n\int_0^T\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

(Le passage de la première à la seconde ligne nécessiterait une justification mathématique, car la somme comporte une infinité de termes, mais dans la mesure où nous sommes à la recherche d'une formule, nous pouvons nous en affranchir. Les hypothèses correctes seront énoncées ultérieurement.)

On a par ailleurs pour tout entier $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^T = \frac{1}{n\omega}\Big(\sin(n\omega T) - \sin 0\Big) = \frac{1}{n\omega}\Big(\sin(2\pi n) - \sin 0\Big) = 0 \\ \int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^T = \frac{1}{n\omega}\Big(-\cos(n\omega T) + \cos 0\Big) = \frac{1}{n\omega}\Big(-\cos(2\pi n) + \cos 0\Big) = 0\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0\int_0^T \mathrm{d}t = a_0 T$$

d'où la formule : $\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}$.

On a également pour un entier $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big)\right]\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= a_0\int_0^T\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_0^T\cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t + b_n\int_0^T\sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Mais :

— $\int_0^T \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$ (comme précédemment)

— <u>pour $n = k$</u> : $\cos(n\omega t)\cos(k\omega t) = \cos^2(k\omega t) = \dfrac{\cos(2k\omega t) + 1}{2}$ donc :

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^T\cos(2k\omega t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{d}t = \frac{T}{2}$$

et $\sin(n\omega t)\cos(k\omega t) = \sin(k\omega t)\cos(k\omega t) = \dfrac{\sin\big(2k\omega t\big)}{2}$ donc :

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^T\sin(2k\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$

— <u>pour $n \neq k$</u> : $\cos(n\omega t)\cos(k\omega t) = \dfrac{\cos\big((n+k)\omega t\big) + \cos\big((n-k)\omega t\big)}{2}$ donc :

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^T\cos\big((n+k)\omega t\big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T\cos\big((n-k)\omega t\big)\,\mathrm{d}t = 0$$

et $\sin(n\omega t)\cos(k\omega t) = \dfrac{\sin\big((n+k)\omega t\big) + \sin\big((n-k)\omega t\big)}{2}$ donc :

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^T\sin\big((n+k)\omega t\big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T\sin\big((n-k)\omega t\big)\,\mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que :

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = a_k\frac{T}{2}$$

d'où la formule, pour $k \geq 1$: $\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t}$.

On établit de la même manière la formule : $\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t}$ (laissée en exercice au lecteur).

3.3 Définitions et théorèmes

Ce qui précède nous amène donc à la définition suivante.

Définition 3.1 Soit $f(t)$ une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.

On suppose que f est <u>localement intégrable</u>, ce qui signifie que $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ est défini pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On pose :

— $a_0 = a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$,

— $a_n = a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$,

— $b_n = b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.

La série $S(f)$ définie par $\boxed{S(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big)}$ s'appelle la série de Fourier de f.

Remarque :

1. Comme $f(t)$ est T-périodique, on a également pour tout t_0 :
   — $a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$,
   — $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$,
   — $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.
2. si $f(t)$ est paire alors $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.
3. si $f(t)$ est impaire alors $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.

Le point 1. est immédiat. On en déduit le point 2. en prenant $t_0 = -T/2$ et en en remarquant de plus que :

— pour toute fonction paire $g(t)$ on a $\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{T/2} g(t)\,\mathrm{d}t$,

— pour toute fonction impaire $h(t)$ on a $\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On applique alors ses deux dernières relations à $g(t) = f(t)\cos(n\omega t)$ et a $h(t) = f(t)\sin(n\omega t)$. Si $f(t)$ est paire alors $g(t)$ est paire également et $h(t)$ est impaire, d'où le résultat.

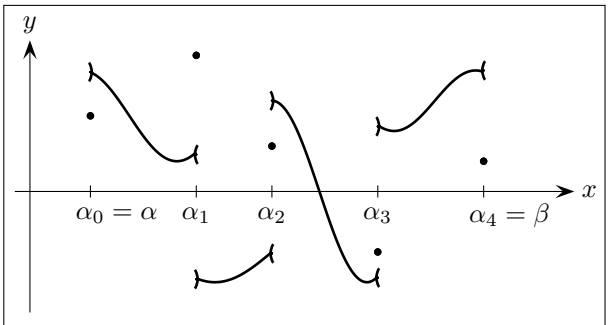
Le point 3. se démontre de la même manière.

Il nous reste à indiquer sous quelles hypothèses la somme de la série de Fourier $S(f)$ est égale à la fonction f.

Définition 3.2 (fonctions continues par morceaux et fonctions de classe C^1 par morceaux)

1. On dit qu'une fonction $f(t)$ définie sur un intervalle fermé $I = [\alpha, \beta]$ est continue par morceau sur I s'il existe une subdivision finie $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_r = \beta$ de l'intervalle I telle que :

— $f(t)$ est continue sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ pour $0 \leq i < r$,
— $f(t)$ admet des limites à droite et à gauche en $t = a_i$ pour $0 \leq i \leq r$ (sauf évidemment à gauche en $t = \alpha_0 = \alpha$ et à droite en $t = \alpha_r = \beta$).

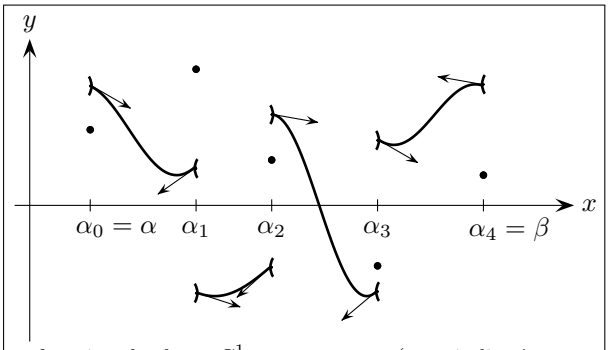


fonction continue par morceaux

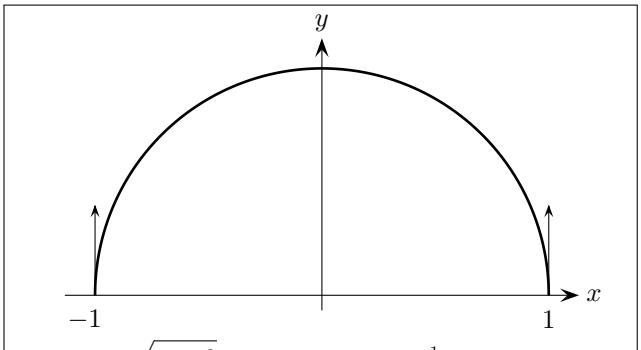
(Les hypothèses ne disent rien de la valeur de $f(t)$ en $t = \alpha_i$ pour $0 \leq \alpha_i \leq r$. Notamment, il n'est pas demandé que $f(t)$ soit continue en $t = \alpha_i$, comme illustré ci-dessus.)

Pour tout $t_0 \in I$, on note $f(t_0^+)$ la limite à droite de $f(t)$ en $t = t_0$ et $f(t_0^-)$ la limite à gauche. (Évidemment, si $f(t)$ est continue en $t = t_0$ alors $f(t_0^+) = f(t_0^-) = f(t_0)$.)

2. On dit qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$ est de classe C^1 sur I si $f(t)$ est continue et dérivable sur I, et si de plus sa dérivée est continue sur I.
3. On dit qu'une fonction $f(t)$ définie sur un intervalle fermé $I = [\alpha, \beta]$ est de classe C^1 par morceau s'il existe une subdivision finie $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_r = \beta$ de l'intervalle I telle que :
   — $f(t)$ est de classe C^1 sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ pour $0 \leq i < r$,
   — $f(t)$ et $f'(t)$ admettent des limites à droite et à gauche en $t = a_i$ pour $0 \leq i \leq r$ (sauf évidemment à gauche en $t = \alpha_0 = \alpha$ et à droite en $t = \alpha_r = \beta$).



fonction de classe C^1 par morceaux (on a indiqué par des vecteurs l'existence de dérivées à droite et à gauche)



la fonction $\sqrt{1-x^2}$ <u>n'est pas de classe C^1 par morceaux</u> sur l'intervalle $[-1, 1]$ car sa dérivée a pour limite $\pm\infty$ en $x = \pm 1$.

Nous admettrons les résultats suivants :

Théorème 3.3 (de Dirichlet) Soit $f(t)$ une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 par morceau sur l'intervalle $[0, T]$, et donc localement intégrable. Alors la série de Fourier $S(f)$ est convergente, et on a :

$$\boxed{S(f)(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

Théorème 3.4 (de Parceval) Soit $f(t)$ une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur l'intervalle $[0, T]$ et donc localement intégrable. Alors :

$$\boxed{|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 \, \mathrm{d}t}$$

Il n'est pas difficile d'établir la formule de Parceval de la même manière qu'on a déterminé les coefficients de Fourier, c'est-à-dire, en s'affranchissant de vérifier les hypothèses nécessaires à l'« interversion des signes $\int$ et $\sum$ » :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \big|f(t)\big|^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^T f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big)\right] \times \left[\overline{a_0} + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\overline{a_k}\cos(k\omega t) + \overline{b_k}\sin(k\omega t)\Big)\right]\,\mathrm{d}t \\
&= a_0\overline{a_0}\int_0^T \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_0\overline{a_k}\int_0^T \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t + a_0\overline{b_k}\int_0^T \sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\overline{a_0}\int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + b_n\overline{a_0}\int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\begin{array}{l} a_n\overline{a_k}\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t + a_n\overline{b_k}\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \\ + b_n\overline{a_k}\displaystyle\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t + b_n\overline{b_k}\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right]
\end{aligned}$$

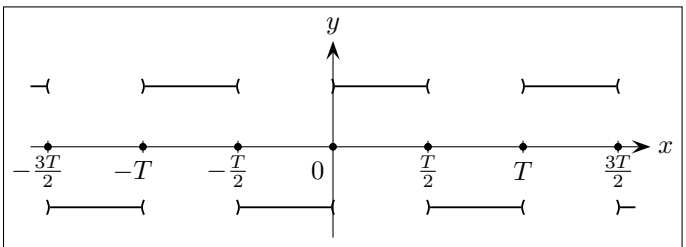
On a déjà établit que, pour tout entier $k \geq 1$ et $n \geq 1$:

- $\displaystyle\int_0^T \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = 0,$
- $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = 0,$
- <u>si $k = n$</u> : $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sin(n\omega t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2},$
- <u>si $k \neq n$</u> : $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sin(n\omega t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Il ne reste donc, dans la dernière expression de $\displaystyle\int_0^T \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t$, que le premier terme et les termes de la double somme en $a_n\overline{a_k}$ et $b_n\overline{b_k}$ pour lesquels $k = n$, d'où : $\displaystyle\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t = T|a_0|^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big)$ qui est le résultat annoncé.

3.4 Exemple

Soit f la fonction T-périodique impaire telle que $f(t) = 1$ pour $t \in]0, T/2[$, et $f(0) = f(T/2) = 0$.



$f(t)$ est un signal carré périodique

On note a_0, a_n, b_n les coefficients de sa série de Fourier.

Comme f est impaire, on a $\boxed{\text{pour tout } n \geq 0 : a_n = 0}$, et pour tout $n \geq 1$:

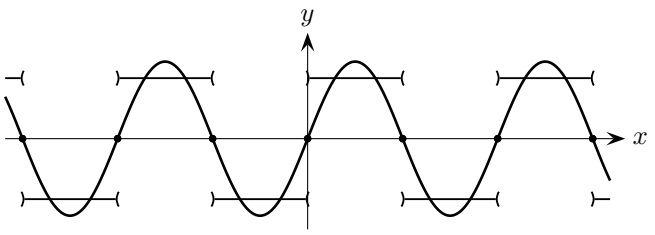
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{n\omega T}\Big[-\cos(n\omega t)\Big]_0^{T/2} = \frac{4}{n\omega T}\left(1 - \cos\Big(\frac{n\omega T}{2}\Big)\right)$$

or $\omega T = 2\pi$, donc $b_n = \dfrac{2}{n\pi}\big(1 - \cos(n\pi)\big)$

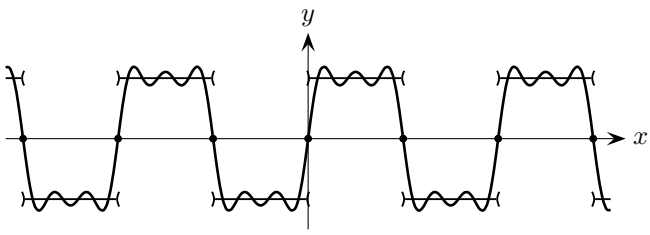
mais $\cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2p \text{ est un nombre pair, avec ici } p \geq 1, \\ -1 \text{ si } n = 2p+1 \text{ est un nombre impair, avec ici } p \geq 0 \end{cases}$

donc : $\boxed{\begin{cases} b_{2p} = 0 & \text{pour tout } p \geq 1 \\ b_{2p+1} = \dfrac{4}{(2p+1)\pi} & \text{pour tout } p \geq 0 \end{cases}}$

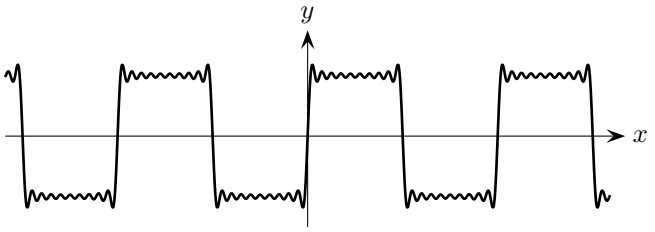
La série de Fourier de f est donc : $\boxed{S(f)(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin\big((2p+1)\omega t\big)}$.



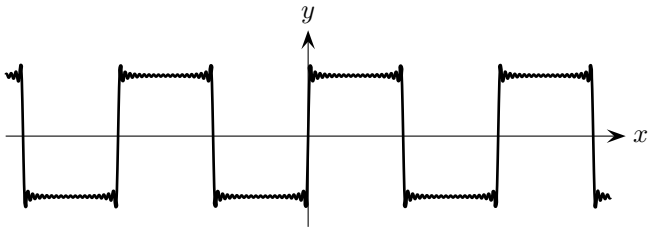
le signal carré et sa composante fondamentale



le signal carré et la somme des 3 premières composantes



somme des 10 premières composantes



somme des 20 premières composantes

Comme f est de classe C^1 par morceaux, et continue sur $]0, T/2[$, on peut en déduire une première égalité remarquable : prenant $t_0 = \dfrac{T}{4}$, on a

$$(2p+1)\omega t_0 = \frac{(2p+1)\omega T}{4} = \frac{(2p+1)\pi}{2} = p\pi + \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\sin\big((2p+1)\omega t_0\big) = \sin\Big(p\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = (-1)^p$$

d'où :

$$1 = f(t_0) = S(f)(t_0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}} \ .$$

Par ailleurs, comme $\big|f(t)\big| = 1$ (sauf pour $t = kT/2$, avec $k \in \mathbb{Z}$) on a :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \big|f(t)\big|^2 = 1$$

qui est égal, d'après le théorème de Parceval, à :

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} |b_{2p+1}|^2 = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{(2p+1)^2\pi^2}$$

d'où l'on déduit que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

Posons maintenant $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. On a alors, en séparant simplement les termes d'indices pairs et impairs :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

d'où $\frac{3S}{4} = \frac{\pi^2}{8}$ donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

3.5 Expression « complexe » des séries de Fourier

À l'aide des formules de Moivre :

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2}$$
$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}$$

on transforme de la manière suivante l'expression de la série de Fourier d'une fonction f :

$$\begin{aligned} S(f)(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\Big) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\Big(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\Big) e^{in\omega t} + \Big(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\Big) e^{-in\omega t} \right) \end{aligned}$$

On note alors c_n le coefficient de $e^{in\omega t}$ apparaissant dans cette expression (pour tout entier n, positif, négatif ou nul), d'où :

$$\boxed{S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}}$$

Et on a :

— $c_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$,

— pour $n \geq 1$: $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\frac{\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$

et $c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\frac{\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{in\omega t}\,\mathrm{d}t$,

— donc pour $n < 0$: $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$.

On obtient ainsi la formule suivante, valable pour tout entier n, positif, négatif ou nul :

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t}.$$

On a alors la formulation suivante du :

Théorème 3.5 (de Parceval) Soit $f(t)$ une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur l'intervalle $[0, T]$ et donc localement intégrable. Alors :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}$$

En effet :

— $|c_0|^2 = a_0^2$

— pour $n \geq 1$: $|c_n|^2 = c_n\overline{c_n} = \dfrac{(a_n - ib_n)(\overline{a_n} + i\overline{b_n})}{4} = \dfrac{|a_n|^2 + |b_n|^2 + i(a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n})}{4}$,

et : $|c_{-n}|^2 = c_{-n}\overline{c_{-n}} = \dfrac{(a_n + ib_n)(\overline{a_n} - i\overline{b_n})}{4} = \dfrac{|a_n|^2 + |b_n|^2 - i(a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n})}{4}$,

donc : $|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \dfrac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}$.

d'où : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\big) = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t.$

Chapitre 4

Transformation de Fourier

4.1 Qu'est-ce qu'une transformation de Fourier ?

Dans le chapitre précédent, nous n'avons considéré que des fonctions périodiques. Elles se décompose en signaux sinusoïdaux dont les pulsation ω sont multiples d'une pulsation de base ω_0, dite fondamentale.

La transformation de Fourier est une généralisation de cette décomposition aux fonctions non périodiques. Des signaux sinusoïdaux de toute pulsation interviennent alors dans la décomposition.

4.2 Fabrique des formules

Soit donc f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$, « suffisamment régulière » et intégrable sur $\mathbb{R}$. Cette hypothèse sera précisée ultérieurement.

On fixe $T_0 \in \mathbb{R}$ « très grand » et $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$, qui est donc « très petit », et on pose $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$.

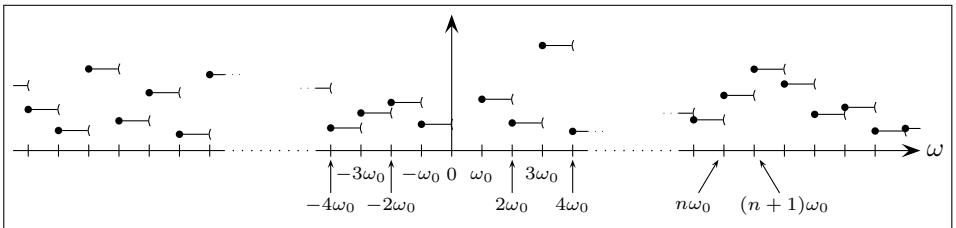
On a d'après le théorème de Dirichlet :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

pour presque tout $t \in \left[-\dfrac{T_0}{2}, \dfrac{T_0}{2}\right]$.

On transforme cette somme infinie en une intégrale par un artifice tout à fait classique : on découpe l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ en une infinité d'intervalles $I_n = [n\omega_0, (n+1)\omega_0[$ où n varie de $-\infty$ à $+\infty$ et on pose :

(1) $$\phi(\omega) = T_0 c_n e^{in\omega_0 t} \text{ pour } \omega \in I_n = [n\omega_0, (n+1)\omega_0[$$



graphe de la fonction $\phi(\omega)$

La fonction $\phi(\omega)$ est ainsi définie pour tout $\omega \in]-\infty, +\infty[$ et est constante sur chacun des intervalles I_n, si bien que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{n\omega_0}^{(n+1)\omega_0} \phi(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{\omega_0}{2\pi} T_0 c_n \exp(in\omega_0 t) = c_n \exp(in\omega_0 t)$$

donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\omega)\mathrm{d}\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{n\omega_0}^{(n+1)\omega_0}\phi(\omega)\mathrm{d}\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(in\omega_0 t) = f(t) \tag{2}$$

pour presque tout $t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$. Lorsque $T_0 \to +\infty$, on obtient une formule valable pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Il nous reste à comprendre vers quoi tend la fonction $\phi(\omega)$ quand $T_0 \to +\infty$.

Revenons à la formule (1) : fixons $\omega \neq 0$ et choisissons T_0 suffisamment grand pour que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ soit « petit » devant ω. Soit alors $n = \left\lfloor \frac{\omega}{\omega_0} \right\rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{\omega}{\omega_0}$. On a donc $\omega \in I_n = [n\omega_0, (n+1)\omega_0[$ c'est à dire $0 \leq \omega - n\omega_0 < \omega_0$ d'où $\omega \simeq n\omega_0$ car ω_0 est « petit » devant ω, donc :

$$\phi(\omega) = T_0 c_n e^{in\omega_0 t} \simeq T_0 c_n e^{i\omega t} = F(\omega)e^{i\omega t}$$

avec

$$F(\omega) = T_0 c_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \simeq \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

On obtient ainsi la définition de la transformation de Fourier $F(\omega)$ de la fonction $f(t)$:

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t}$$

Comme $\phi(\omega) \simeq F(\omega)e^{i\omega t}$, la formule (2) nous donne alors la formule de la transformation de Fourier « inverse », qui exprime la $f(t)$ en fonction de sa transformation de Fourier $F(\omega)$:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega}$$

4.3 Définitions et théorèmes

On ne considére ici que des fonctions continues par morceaux sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

Définition 4.1 (fonctions sommables et fonctions de carrés sommables)

Soit $f(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

1. On dit que f est sommable sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. On dit que f est de carré sommable sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque : Cette définition est plus généralement donnée dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue qui permet d'étendre la définition de l'intégrale à une classe plus large de fonctions que la définition de l'intégrale de Riemann. Dans ce cadre, l'hypothèse de continuité est superflue et inutile, et on dit d'une intégrale qu'elle est définie, plutôt qu'elle converge.

Nous admettrons les résultats suivants :

Théorème 4.2 (existence de la transformation de Fourier et de la transformation inverse)

Soit $f(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{C}$, continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.

1. Si f est sommable, alors elle admet une transformation de Fourier $\mathscr{F}(f)$ définie par :

$$\boxed{\mathscr{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t}$$

2. Si f est de carré sommable, alors $\mathscr{F}(f)$ est également de carré sommable et l'on a :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega}$$

pour presque tout t. De plus :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathscr{F}(f)(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega}$$

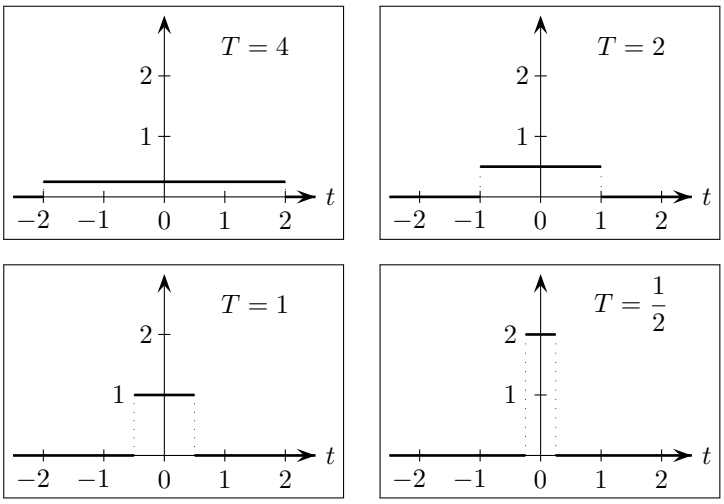
On pourra déduire cette dernière formule de la formule de Parceval donnée au chapitre précédent, de la même manière qu'on a établit la formule de la transformation de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t \simeq \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |T_0 c_n|^2$$
$$\simeq \frac{1}{\omega_0 T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{n\omega_0}^{(n+1)\omega_0} \left|\mathscr{F}(f)(\omega)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathscr{F}(f)(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

4.4 Exemples

4.4.1 Transformation de Fourier d'un créneau centré à l'origine

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f(t)$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{T} \text{ si } -\dfrac{T}{2} \leq t \leq \dfrac{T}{2}, \\ f(t) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

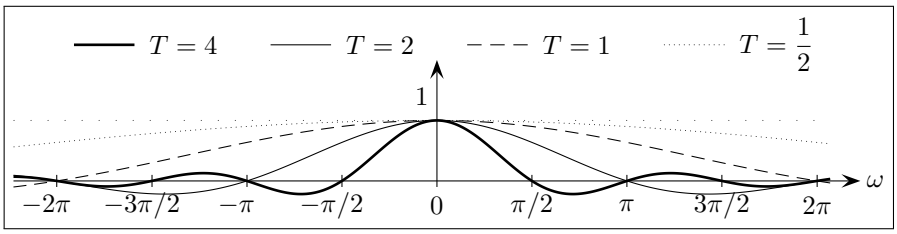


Lorsque $T \to 0^+$, le créneau est de plus en plus étroit et haut.

On a :

$$\mathscr{F}(f)(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{2}{\omega T} \times \frac{e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2}}{-2i} = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

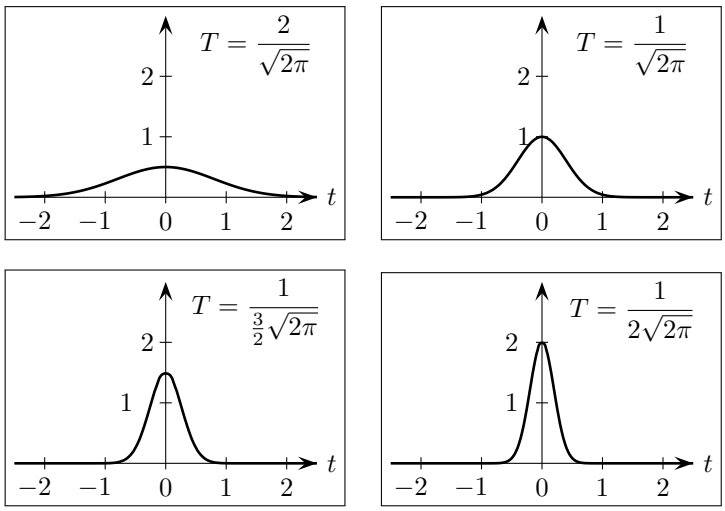
où l'on a introduit la fonction « sinus cardinal » : $\operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin x}{x}$.



Lorsque $T \to 0^+$, $\mathscr{F}(f)(\omega)$ tend vers la fonction constante égale à 1.

4.4.2 Transformation de Fourier d'une gaussienne

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f(t)$ la fonction définie par : $\boxed{f(t) = \dfrac{1}{T\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2T^2}}$.



Lorsque $T \to 0^+$, la gaussienne $f(t)$ forme un pic de plus en plus étroit et haut.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f)(\omega) &= \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2/2T^2)-i\omega t}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\omega T^2)^2/2T^2-(\omega T)^2/2}\, \mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\omega T^2)^2/2T^2}\, \mathrm{d}t \right) \times e^{-(\omega T)^2/2}
\end{aligned}$$

On considère alors $\varphi(\omega) = \dfrac{1}{T\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\omega T^2)^2/2T^2}\, \mathrm{d}t$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi'(\omega) &= \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2iT^2(t+i\omega T^2)}{2T^2} e^{-(t+i\omega T^2)^2/2T^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{iT^2}{T\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-(t+i\omega T^2)}{T^2} e^{-(t+i\omega T^2)^2/2T^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{iT}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-(t+i\omega T^2)^2/2T^2} \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty}
\end{aligned}$$

Or $\left| e^{-(t+i\omega T^2)^2/2T^2} \right| = e^{\Re e\left(-(t+i\omega T^2)^2/2T^2\right)} = e^{-(t^2-\omega^2T^2)/T^2}$ tend vers 0 quand $t \to \pm\infty$, donc $\varphi'(\omega) = 0$.

On en déduit que $\varphi(\omega)$ est une constante λ, égale à $\varphi(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ qui est strictement positif. D'où :

$$\mathscr{F}(f)(\omega) = \lambda e^{-(\omega T)^2/2}, \text{ avec } \lambda > 0.$$

Par transformation de Fourier inverse, on a :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\left((\omega T)^2/2\right)+i\omega t}\, \mathrm{d}\omega = \frac{\lambda}{T\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left((\omega T)^2/2\right)+i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

Par ailleurs, le calcul de la transformée de Fourier de f nous a montré que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{A\sqrt{2\pi}} e^{-(v^2/2A^2)-iuv}\, \mathrm{d}v = \lambda e^{-(uA)^2/2}$$

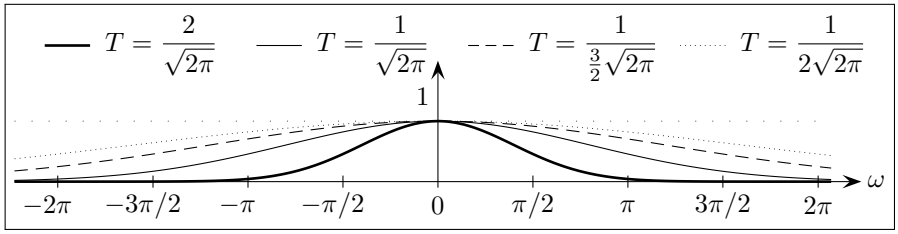
En posant alors $A = \dfrac{1}{T}$, $u = -t$ et $v = \omega$, on obtient alors la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left((\omega T)^2/2\right)+i\omega t}\, \mathrm{d}\omega = \lambda e^{-t^2/2T^2}$$

d'où :

$$f(t) = \frac{\lambda^2}{T\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2T^2}$$

ce qui montre que $\lambda = 1$, c'est à dire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, et que $\boxed{\mathscr{F}(f)(\omega) = e^{-(\omega T)^2/2}}$.



Lorsque $T \to 0^+$, la gaussienne $\mathscr{F}(f)(\omega)$ tend vers la fonction constante égale à 1.

4.5 Propriétés élémentaires de la transformation de Fourier

Nous laissons au lecteur le soin d'établir les formules élémentaires suivantes.

La formule de la transformation de Fourier d'un produit de fonction est plus difficile à établir. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

4.5.1 Linéarité

$\mathscr{F}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathscr{F}(f_1) + \lambda_2 \mathscr{F}(f_2)$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

4.5.2 Translation

Si $g(t) = f(t - t_0)$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$, alors $\mathscr{F}(g)(\omega) = \mathscr{F}(f)(\omega) \times e^{-i\omega t_0}$ (poser $u = t - t_0$ dans la formule $\mathscr{F}(f)(\omega) = \ldots$).

On dit que $g(t)$ est obtenue à partir de $f(t)$ par <u>translation de paramètre t_0</u> et on note $g = \mathscr{T}_{t_0}(f)$.

(Le graphe de g est effectivement obtenu à partir de celui de f par translation de vecteur $(t_0, 0)$.)

4.5.3 Dilatation

Si $g(t) = f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors $\mathscr{F}(g)(\omega) = |\alpha| \mathscr{F}(f)(\alpha\omega)$ (poser $u = \frac{t}{\alpha}$ et distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).

On dit que $g(t)$ est obtenue à partir de $f(t)$ par <u>dilatation de paramètre α</u> et on note $g = \mathscr{D}_\alpha(f)$.

Une dilatation de paramètre α dans le domaine temporel entraîne donc une dilatation de paramètre $\frac{1}{\alpha}$ (ou si l'on préfère une contraction de paramètre α) dans le domaine des fréquences. C'est un phénomène bien connu des anciens possesseurs de phonographes ou de magnétophones : lorsqu'on ralentit la vitesse de l'appareil (la lecture prend plus de temps, c'est donc une dilatation dans le domaine temporel) le son devient plus grave (il n'y a plus de son aigu, c'est donc une contraction dans le domaine des fréquences) et vice-versa.

4.5.4 Intégration

Si f est de classe C^1 par morceaux et si f' est sommable sur $\mathbb{R}$, alors f est sommable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{F}(f')(\omega) = i\omega\, \mathscr{F}(f)(\omega)$ (faire une intégration par parties).

4.6 Produit de convolution et transformation de Fourier

Définition 4.3 (produit de convolution) Soient f et g deux fonctions sommables sur $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution de f et g, et on note $f * g$ la fonction définie par la formule :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$$

Le changement de variable $v = t-u$ aboutit à la relation $(f*g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v$ qui n'est autre que $(g*f)(t)$. Le produit de convolution est donc commutatif.

Nous admettrons par ailleurs que $f*g$ est elle même une fonction sommable, et que si f et g sont de carrés sommables, alors $f * g$ l'est également.

Théorème 4.4 (transformation de Fourier d'un produit de convolution)

Soient f et g deux fonctions sommables sur $\mathbb{R}$. On a $\boxed{\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f) \times \mathscr{F}(g)}$.

En effet :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f * g)(\omega) &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} (f * g)(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \left(\int_{u=-\infty}^{u=+\infty} f(u)g(t-u)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} \left(\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(u)g(t-u)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} f(u)\left(\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} g(t-u)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} f(u)\Big(\mathscr{F}(g)(\omega) \times e^{-i\omega u}\Big)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(cf. § 4.5 ci dessus)} \\
&= \mathscr{F}(g)(\omega) \times \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,\mathrm{d}u \\
&= \mathscr{F}(g)(\omega) \times \mathscr{F}(f)(\omega)
\end{aligned}$$

Corollaire 4.5 (transformation de Fourier d'un produit)

Soient f et g deux fonctions de carrés sommables sur $\mathbb{R}$. On a $\boxed{\mathscr{F}(fg) = \dfrac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g)}$.

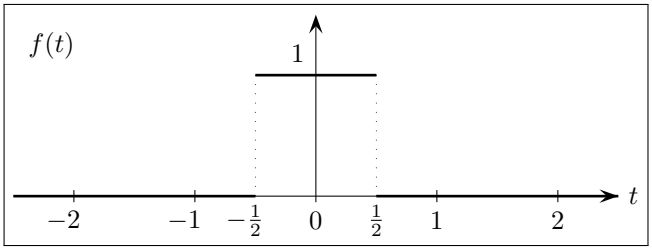
Remarquons tout d'abord que la formule énoncée dans le théorème 4.4 est valable également, à un coefficient multiplicatif près, pour la transformation de Fourier inverse $\mathscr{F}^{-1}(\phi)(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$. On a dans ce cas, si ϕ et ψ sont deux fonctions sommables sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathscr{F}^{-1}(\phi * \psi) = 2\pi\mathscr{F}^{-1}(\phi) \times \mathscr{F}^{-1}(\psi)}$ $(*)$.

Alors, comme f et g sont de carrés sommables, il en est de même de leurs transformations de Fourier respectives $\phi = \mathscr{F}(f)$ et $\psi = \mathscr{F}(g)$ et l'on a alors $f = \mathscr{F}^{-1}(\phi)$ et $g = \mathscr{F}^{-1}(\psi)$. De la formule $(*)$ qui précède, on déduit alors que $2\pi fg = \mathscr{F}^{-1}(\phi * \psi)$ d'où par transformation de Fourier (directe) $2\pi\mathscr{F}(fg) = \phi * \psi = \mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g)$ qui est le résultat annoncé.

4.7 D'autres exemples

4.7.1 Produit de convolution de 2 créneaux et sa transformation de Fourier

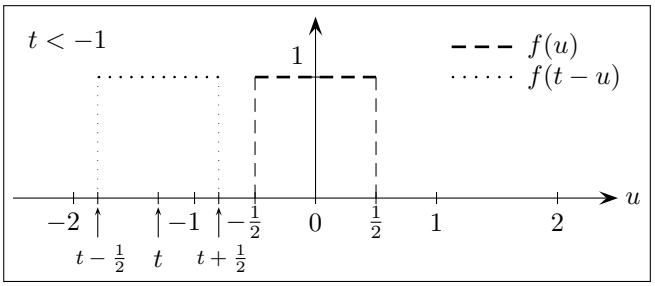
Soit $f(t)$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } -\dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ f(t) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$



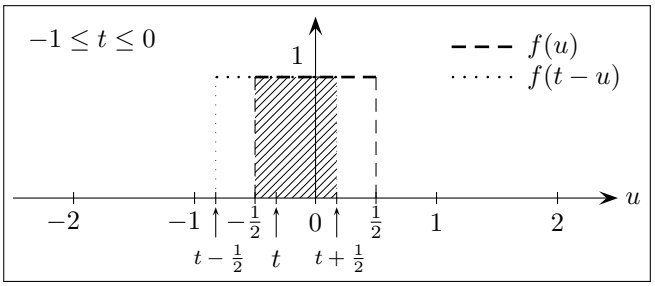
On pose $g(t) = (f * f)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(t-u)\,\mathrm{d}u$.

Comme $f(u) \neq 0 \Leftrightarrow u \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et $f(t-u) \neq 0 \Leftrightarrow u \in \left[t - \dfrac{1}{2}, t + \dfrac{1}{2}\right]$, on a :

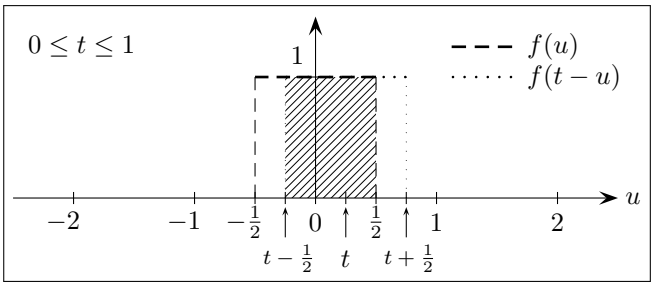
1. <u>si $t < -1$</u> :
   alors $f(u)f(t-u) \equiv 0$ donc $(f * f)(t) = 0$.



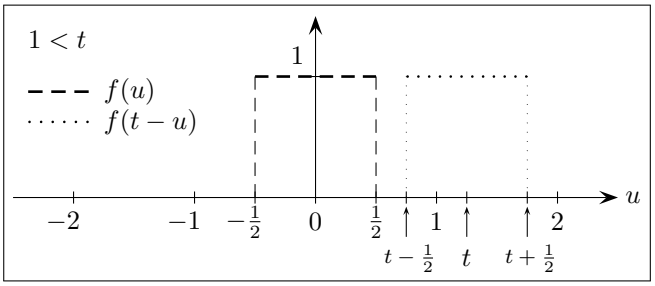
2. <u>si $-1 \leq t \leq 0$</u> :
   alors $f(u)f(t-u) \neq 0 \Leftrightarrow u \in \left[-\dfrac{1}{2}, t + \dfrac{1}{2}\right]$ donc $(f * f)(t) = \displaystyle\int_{-1/2}^{t+1/2} f(u)f(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1/2}^{t+1/2} \mathrm{d}u = 1 + t$.



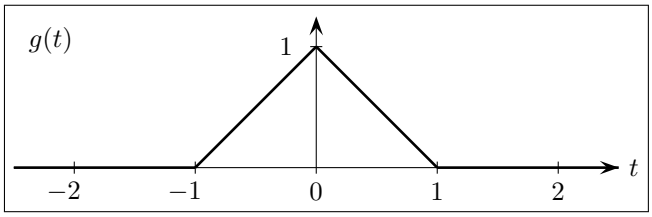
3. <u>si $0 \leq t \leq 1$</u> :
   alors $f(u)f(t-u) \neq 0 \Leftrightarrow u \in \left[t - \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ donc $(f * f)(t) = \displaystyle\int_{t-1/2}^{1/2} f(u)f(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_{t-1/2}^{1/2} \mathrm{d}u = 1 - t$.



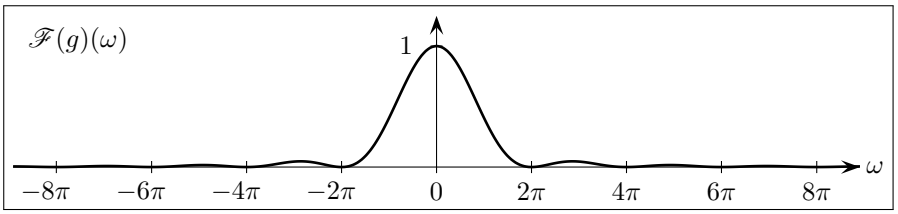
4. <u>si $1 < t$</u> :
   alors $f(u)f(t-u) \equiv 0$ donc $(f * f)(t) = 0$.



D'où le graphe de $g(t)$:



Par ailleurs, on a $\mathscr{F}(g)(\omega) = \mathscr{F}(f)(\omega)^2 = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ d'après les § 4.4.1 et § 4.6.



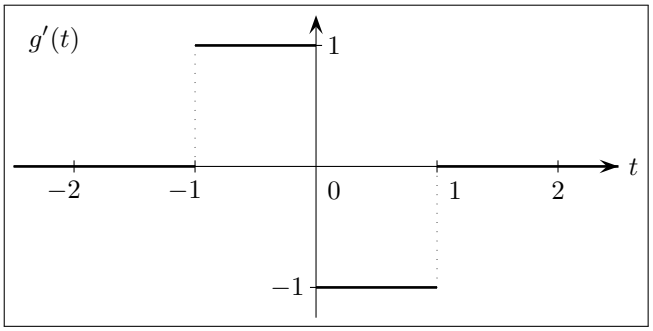
4.7.2 Dérivation et translation

Reprenons l'exemple précédent. On a $\begin{cases} g'(t) = 0 \text{ si } t < -1, \\ g'(t) = 1 \text{ si } -1 < t < 0, \\ g'(t) = -1 \text{ si } 0 < t < 1, \\ g'(t) = 0 \text{ si } 1 < t, \\ g'(t) \text{ n'est pas défini pour } t = -1,\ t = 0 \text{ et } t = 1 \end{cases}$

Donc, sauf pour un nombre fini de valeurs de t, on a

$$g'(t) = \mathscr{T}_{-1/2}(f) - \mathscr{T}_{1/2}(f)$$

où $\mathscr{T}_{t_0}(f)$ désigne la translation de paramètre t_0 de la fonction f (cf. § 4.5.2).



La transformation de Fourier de $g'(t)$ est donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(g')(\omega) &= \mathscr{F}(\mathscr{T}_{-1/2}(f))(\omega) - \mathscr{F}(\mathscr{T}_{1/2}(f))(\omega) \\ &= \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{i\omega/2} - \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-i\omega/2} \\ &= \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \left(e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}\right) \\ &= \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) 2i \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(g)(\omega) &= \frac{1}{i\omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) 2i \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \\ &= \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

Chapitre 5

« Fonction » de Dirac

5.1 Une nouvelle fonction, pour quoi faire ?

Dans les sections 4.4.1 et 4.4.2, on a étudié des familles de fonctions f_T (où $T > 0$) (des créneaux ou des gaussiennes) qui vérifie dans les 2 cas les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\mathrm{d}t = 1$ pour tout $T > 0$.
2. $\displaystyle\lim_{T\to 0^+} f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Mais également la propriété suivante qui n'était pas indiquée précédemment :

3. $\displaystyle\lim_{T\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0)$ pour toute fonction $\varphi(t)$ continue en $t = 0$.

Et enfin :

4. $\displaystyle\lim_{T\to 0^+} \mathscr{F}(f_T)(\omega) = 1$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

Ainsi ces familles de fonctions n'ont pas de limite quand t tend vers 0^+, contrairement à leurs transformées de Fourier.

On remarque également que la formule de la transformée de Fourier inverse ne s'applique pas à la limite de $\mathscr{F}(f_T)$ qui est la fonction constante égale à 1. En effet, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$ n'est pas convergente, quelque soit $\omega \in \mathbb{R}$. On peut tout de même extrapoler les calculs suivants :

5. pour $t = 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega = +\infty$. (C'est l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.)
6. pour $t \neq 0$: $e^{i\omega t}$ est une fonction (de variable ω) de moyenne nulle. Plus précisément $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = 0$. d'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = 0$.

La « fonction » de Dirac (l'emploi du terme fonction est abusif) est introduite pour donner un cadre aux calculs qui précèdent. (Leur justification est plus délicate.)

5.2 Définition et propriétés

Définition 5.1 La « fonction » de Dirac δ est définie par :

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0^+} f_T(t)$$

où $f_T(t)$ une famille de fonctions vérifiant les propriétés 1, 2 et 3 qui précèdent. On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) \qquad (\star)$$

pour toute fonction φ continue en $t = 0$.

La propriété $(\star)$ permet de manipuler la « fonction » de Dirac, dans le calcul intégral, comme une fonction usuelle. On en déduit notamment :

1. $\mathscr{F}(\delta)(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 1$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.
2. $\varphi'(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Big[\delta(t)\varphi(t)\Big]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$
   La dérivée de la « fonction » de Dirac est donc telle que :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = -\varphi'(0)$$
   pour toute fonction φ dérivable en $t = 0$.
   Cette formule se généralise pour les dérivées successives :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$
   pour toute fonction φ, n fois dérivable en $t = 0$.
3. Une primitive de δ est la fonction de Heavyside $H(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

5.3 Exemple d'application

Reprenons l'exemple du § 4.7.2. La fonction $g'(t)$ est telle que :

$$g'(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -1 \\ 1 & \text{pour } -1 < t < 0 \\ -1 & \text{pour } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{pour } 1 < t \end{cases}$$

Autrement dit :

$$g' = \mathscr{T}_{-1}(H) - 2H + \mathscr{T}_1(H)$$

où H désigne la fonction de Heavyside et où $\mathscr{T}_\tau(f)(t) = f(t - \tau)$. On en déduit que :

$$g'' = \mathscr{T}_{-1}(\delta) - 2\delta + \mathscr{T}_1(\delta)$$

La transformée de Fourier de g'' est donc égale à :

$$\mathscr{F}(g'')(\omega) = \mathscr{F}\big(\mathscr{T}_{-1}(\delta)\big)(\omega) - 2\mathscr{F}(\delta)(\omega) + \mathscr{F}\big(\mathscr{T}_1(\delta)\big)(\omega) = e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega} = 2\cos\omega - 2 = -4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

D'où la transformée de Fourier de g' :

$$\mathscr{F}(g')(\omega) = -\frac{4}{i\omega}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)2i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)2i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

qui est le résultat obtenu précédement.

5.4 Distributions à support fini

La « fonction » de Dirac δ est plus généralement connu sous le terme de **distribution** de Dirac.

(Nous ne donnerons pas ici de définition générale des distributions.)

Comme $\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$, on dit que le support de δ est le point 0. Les dérivées de δ ont également pour support le point 0.

La distribution $\mathscr{T}_\tau(\delta)$ obtenu par décalage de δ, ainsi que ses dérivées, ont pour support le point τ.

Toute combinaison linéaire de δ, de ses translations et de leurs dérivées est appelée distribution à support fini.

Chapitre 6

Transformation de Laplace

6.1 Qu'est-ce qu'une transformation de Laplace ?

La transformation de Laplace $\mathscr{L}(f)$ est une extension au domaine complexe de la transformation de Fourier $\mathscr{F}(f)$. Pour être correctement définie, il convient toutefois de restreindre l'ensemble des fonctions f auxquelles on applique cette transformation.

6.2 Formules

Définition 6.1 On dit qu'une fonction (ou une distribution à support fini) $f(t)$, définie sur $\mathbb{R}$, est à support positif si $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

Définition 6.2 Soit $f(t)$ une fonction (ou une distribution à support fini) à support positif. La transformée de Laplace de f est $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$ où $p \in \mathbf{C}$.

Remarques :

1. La transformée de Laplace de f n'est pas en général définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ Ce point sera précisé dans les exemples.
2. On a pour $p = i\omega$: $\mathscr{L}(f)(i\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\mathrm{d}t = \mathscr{F}(f)(\omega)$.
   La transformation de Laplace étend donc la définition de la transformation de Fourier pour les fonctions (ou les distributions à support fini) à support positif.
3. La transformée de Laplace d'une fonction usuelle f peut aussi s'écrire : $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$. Lorsque f est une distribution à support concentré en $x = 0$ (par exemple la « fonction » de Dirac δ) cette expression peut-être ambiguë. On écrit parfois $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_{0^-}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$ pour bien indiquer que 0 fait partie du domaine d'intégration.

6.3 Exemples

1. Soit $H(t)$ telle que $H(t) = 0$ pour $t < 0$ et $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$. On a $\mathscr{L}(H)(p) = \mathscr{L}(H)(p) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-pt}\mathrm{d}t = \left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_{t=0}^{t=+\infty}$. Pour que e^{-pt} ait une limite en $+\infty$, il faut que $\Re e(p) > 0$ et dans ce cas $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} = 0$, d'où $\mathscr{L}(H)(p) = \dfrac{1}{p}$, définie pour $\Re e(p) > 0$.
2. Soit $\tau > 0$. On a $H(t-\tau) = 0$ pour $t < \tau$ et $H(t) = 1$ pour $t \geq \tau$. Donc $\mathscr{L}\big(H(t-\tau)\big) = \displaystyle\int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt}\mathrm{d}t = \left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_{t=\tau}^{t=+\infty} = \frac{e^{-p\tau}}{p}$, définie pour $\Re e(p) > 0$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a $\mathscr{L}\big(e^{-\alpha t}H(t)\big)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-e^{(p+\alpha)t}}{p+\alpha}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p+\alpha}$, définie pour $\Re e(p+\alpha) > 0$.
4. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a $\mathscr{L}\big(e^{i\omega t}H(t)\big)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-e^{(p-i\omega)t}}{p-i\omega}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-i\omega}$, définie pour $\Re e(p) > 0$.
5. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a $\mathscr{L}\big(\cos(\omega t)H(t)\big)(p) = \mathscr{L}\left(\dfrac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}H(t)\right)(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}+\dfrac{1}{p+i\omega}\right) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, définie pour $\Re e(p) > 0$.
6. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a $\mathscr{L}\big(\sin(\omega t)H(t)\big)(p) = \mathscr{L}\left(\dfrac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}H(t)\right)(p) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}-\dfrac{1}{p+i\omega}\right) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, définie pour $\Re e(p) > 0$.
7. Soit $f_n(t) = t^nH(t)$. On a pour $\Re e(p) > 0$, par intégration par partie : $\mathscr{L}(f_n)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^ne^{-pt}\mathrm{d}t = \left[t^n\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} nt^{n-1}\frac{-e^{-pt}}{p}\mathrm{d}t = \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{n}{p}\mathscr{L}(f_{n-1})(p)$.
   D'où $\mathscr{L}(f_n)(p) = \dfrac{n!}{p^n}\mathscr{L}(f_0)(p) = \dfrac{n!}{p^n}\mathscr{L}(H)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, définie pour $\Re e(p) > 0$.
8. Soit δ la fonction de Dirac. $\mathscr{L}(\delta)(p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)\mathrm{d}t = \big[e^{-pt}\big]_{t=0} = 1$, définie pour tout $p \in \mathbf{C}$.
9. Soit $\tau > 0$. On a $\mathscr{L}\big(\delta(t-\tau)\big)(p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t-\tau)\mathrm{d}t = \big[e^{-pt}\big]_{t=\tau} = e^{-\tau p}$, définie pour tout $p \in \mathbf{C}$.

6.4 Quelques propriétés

1. Dérivée de la transformée de Laplace : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -te^{-pt}f(t)\mathrm{d}t = -\mathscr{L}\big(tf(t)\big)$.
2. Transformée de Laplace de la dérivée :
   $\mathscr{L}(f')(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}f'(t)\mathrm{d}t = \big[e^{-pt}f(t)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -pe^{-pt}f(t)\mathrm{d}t = -f(0)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t = p\mathscr{L}(f)(p)-f(0)$
   sous la condition : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}f(t) = 0$.

   On a plus généralement : $\mathscr{L}(f(n))(p) = p^n\mathscr{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.
3. Dilatation : si $a > 0$, notons $\mathscr{D}_a(f)$ la fonction définie par $\mathscr{D}_a(f)(t) = f(at)$.
   On a : $\mathscr{L}\big(\mathscr{D}_a(f)\big)(p) = \dfrac{1}{a}\mathscr{L}(f)\Big(\dfrac{p}{a}\Big)$ pour $a > 0$, obtenu par le changement de variable $u = at$ dans la formule de la transformée de Laplace.
4. Décalage sur t : si $\tau > 0$, notons $\mathscr{T}_\tau(f)$ la fonction définie par $\mathscr{T}_\tau(f)(t) = f(t-\tau)$.
   On a : $\mathscr{L}\big(\mathscr{T}_\tau(f)\big)(p) = e^{-\tau p}\mathscr{L}(f)(p)$ (par calcul direct, comme dans l'exemple 2).
5. Décalage sur p : $\mathscr{L}\big(e^{-\alpha t}f(t)\big)(p) = \mathscr{L}(f)(p+\alpha)$ (par calcul direct, comme dans l'exemple 3).
6. Produit de convolution : si $f(t)$ et $g(t)$ sont 2 fonctions (ou 2 distributions à support fini) à support positif, alors $(f*g)(t) = \displaystyle\int_{u=-\infty}^{u=+\infty} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u$ est également à support positif. On remarque également que, dans ce cas, $(f*g)(t) = \displaystyle\int_{u=0}^{u=+\infty} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u$, car $g(u) = 0$ pour $u < 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f*g)(p) &= \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-pt}(f*g)(t)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-pt}\left(\int_{u=0}^{u=+\infty} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{u=0}^{u=+\infty} g(u)\left(\int_{t=0}^{t=+\infty} f(t-u)e^{-pt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_{u=0}^{u=+\infty} g(u)\mathscr{L}\big(\mathscr{T}_u(f)\big)(p)\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=0}^{u=+\infty} g(u)e^{-up}\mathscr{L}(f)(p)\mathrm{d}u = \mathscr{L}(f)(p)\times\int_{u=0}^{u=+\infty} g(u)e^{-up}\mathrm{d}u \\
&= \mathscr{L}(f)(p)\times\mathscr{L}(g)(p)
\end{aligned}$$

   d'où : $\mathscr{L}(f*g) = \mathscr{L}(f)\mathscr{L}(g)$.

6.5 Exemple d'application

Considérons une équation différentielle linéaire :

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = \varphi(t) \tag{E}$$

où $f(t)$ est la fonction inconnue, à support positif et vérifiant des conditions initiales en $t = 0$, et $\varphi(t)$ une fonction (suffisamment régulière) donnée.

Notons $F = \mathscr{L}(f)$ et $\Phi = \mathscr{L}(\varphi)$. On a alors, en appliquant la transformation de Laplace aux membres de l'équation (E) :

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) + a\big(pF(p) - f(0)\big) + bF(p) = \Phi(p)$$

d'où :

$$F(p) = \frac{\Phi(p) + pf(0) + af(0) + f'(0)}{p^2 + ap + b}$$

On remarque notamment que les conditions initiales sur $f(t)$ en $t = 0$ sont intégrées au calcul dans la transformation de Laplace.

Traitons le cas particulier où :
- $\phi(t) = CH(t)$ (où $H(t)$ est la fonction de Heavyside),
- $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$,
- $a = 0$ et $b = \omega^2$,

on a :

$$F(p) = \frac{C}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{C}{\omega^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2}\right)$$

d'où :

$$f(t) = \frac{C}{w^2}\Big(H(t) - \cos(\omega t)\Big)$$