

## TD d'Algèbre du mercredi 13 septembre 2006

1

Soit  $\theta$  un nombre réel et  $n$  un entier. Calculer  $\sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta)$ .

2

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les complexes  $z_1, \dots, z_n$  pour que l'on ait  $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$

3

Résoudre  $z^3 = 1 + i$ .

4

Résoudre  $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$ .

5

Résoudre le système  $b + c + 1 = 0, b^2 + c^2 + 1 = 0$ .

6

Déterminer les affixes des 2 points d'intersection des deux cercles de rayon 1 et de centres 0 et  $-1$ .

Pour quelles valeurs de  $n$  l'équation  $(x+1)^n = x^{n+1} + 1$  possède-t-elle une racine multiple ?

7

Si  $a, b$  sont les affixes de deux sommets d'un carré, déterminer les affixes des deux autres sommets.

8

Soient  $a, b, c$  trois complexes distincts. Montrer que les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

- $a, b, c$  sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.
- $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$
- $j$  ou  $j^2$  est racine de  $az^2 + bz + c$
- $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$

9

Déterminer les complexes  $z$  tels que le triangle  $z, z^2, z^3$  soit rectangle en  $z$ .

10

Dessiner la courbe  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  ainsi que sont image par  $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ .

11

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a \in \mathbb{C}$ , et  $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3}$ . Montrer que tous ses termes sont situés sur un même cercle. Quelle est la limite de cette suite.