Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 27 septembre 2006

1

La composition de deux similitudes est-elle commutative ?

2

Etant donné un parallélogramme, on construit les quatre carrés extérieurs s'appuyant sur les cotés du parallélogramme. Montrer que les centres de ces quatres carrés forment un carré.

3

Montrer que le produit des longueurs des diagonales d'un quadrilatère est inférieur à la somme des produits des longueurs des cotés opposés. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si le quadrilatère est convexe et si ses quatre sommets sont cocycliques.

4

4.1. Soient a un nombre complexe et ρ un nombre réel positif. Montrer que l'équation $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + c = 0$ détermine un cercle si $\rho < |a|^2$. Réciproquement, montrer que tout cercle possède une équation de ce type.

4.2. Soient a, b deux complexes, et r un réel positif. Montrer que l'ensemble des points du plan dont l'affixe est solution de $\frac{|z-a|}{|z-b|} = r$ est un cercle (déterminer son centre et son rayon).

5. Birapport

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 4 complexes distincts. Leur *birapport* est le nombre complexe

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}.$$

Montrer que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les affixes de 4 points alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.

6. Sphère de Riemann

On note P la droite projective complexe, c'est à dire l'union de $\mathbb{C}$ et d'un point dit "à l'infini", noté ∞.

6.1. Montrer que toute homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (où a, b, c, d sont 4 complexes tels que $ad - bc \neq 0$) se prolonge naturellement en une bijection de $P \mapsto P$.

6.2. Expliciter une bijection entre P et la sphère usuelle $S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u^2+v^2+w^2 = 1\}$. Déterminer l'image dans S d'un cercle de P.

6.3. Expliciter une bijection entre S et l'ensemble des droites vectorielles du plan complexe $\mathbb{C}^2$. Soit $A \in GL_2(\mathbb{C})$. Montrer que M induit une bijection de P (l'expliciter en fonction des coefficients de A).

7. Homographies

7.1. A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ on associe l'homographie $h_A\ : P \to P$ qui envoie $z \neq -\frac{d}{c}$ sur $\frac{az+b}{cz+d}$. Comparer $h_A \circ h_B$ et h_{AB}.

7.2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies possède une structure de groupe naturelle. Montrer que ce groupe est engendré par les similitudes directes et l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$. Déterminer l'image et le noyau du morphisme de groupes $GL_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$ considéré à la question précédente.

7.3. Montrer qu'une homographie préserve le birapport. Montrer que les homographies préservent les cercles de P (une droite de $\mathbb{C}$ s'identifie à un cercle de P qui passe par ∞). Montrer qu'une application de P dans P qui préserve le birapport est une homographie.

7.4. Soient z_1, z_2 deux complexes distincts et $\mathcal{H}_{z_1,z_2}$ le sous-groupe de $\mathcal{H}$ formé des homographies qui ont z_1 et z_2 comme points fixes. Soit $h\ : z \mapsto \frac{z-z_1}{z-z_2}$. Quel est le conjugué de $\mathcal{H}_{z_1,z_2}$ par l'élément h ? En déduire que $\mathcal{H}_{z_1,z_2}$ est isomorphe au groupe des complexes de module 1.

7.5. Déterminer le sous-groupe de $\mathcal{H}$ formé des homographies qui préservent ∞.

7.6. Montrer qu'une homographie est complètement déterminée par l'image des trois points distincts.