Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 04 octobre 2006

1

1.1. Les similitudes forment-elle un sous groupe distingué du groupe des homographies ?

1.2. Les homothéties forment-elles un sous-groupe du groupe des similitudes ?

1.3. Décrire complètement le groupe des similitudes qui préservent un triangle équilatéral (donner le nombre d'éléments, la table de multiplication). Même question pour le carré, pour le rectangle.

2

Déterminer (à isomorphisme de groupes près) tous les groupes d'ordre 4 ainsi que ceux d'ordre 6.

3

Soit G le groupe des déplacements du plan. On appèle *angle* d'un déplacement le complexe unitaire qui représente l'angle entre un vecteur non nul donné et son image.

3.1. Soit $\phi\ : G \to U$ l'application qui à un déplacement associe sont angle. Déterminer $T = \ker \phi$.

3.2. Soit $O \subset G$ le sous-groupe des rotations. O est-il un sous-groupe distingué ? Est-il isomorphe à G/T ?

3.3. Soit $H \subset G$ le sous-groupe engendré par les translations et les symmétries centrales. H est-il un sous-groupe distingué ?

3.4. Soit $K \subset G$ le sous groupe engendré par les rotations d'angle $\frac{2k\pi}{n}$. K est-il un sous-groupe distingué ?

4. Propriétés élémentaire des groupes.

Les questions suivantes sont largement indépendantes.

4.1. Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 est distingué.

4.2. Montrer qu'un groupe ne peut-être en bijection avec l'union de deux sous-groupes propres.

4.3. Soit G un groupe d'ordre pair. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.

4.4. Montrer que dans le groupe des automorphismes d'un groupe donné, le sous-groupe des automorphismes intérieurs est distingué.

5

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On considère l'ensemble des sous-groupes du groupe cyclique d'ordre n $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, muni de la relation d'ordre (partiel) "être un sous-groupde de". Montrer que cet emsble partiellement ordoné est isomorphe àl'ensemble des diviseurs de n muni des la relation d'ordre "être un diviseur de".

Donner une reprśentation analogue de l'ensemble partiellement ordonné des sous-groupes du groupe cyclique infini.

6

Soient H et G des groupes finis, et $\phi : H \mapsto G$ un morphisme de groupes. Montrer que ϕ induit une application des classes de conjugaison de H vers les classes de conjugaison de G. On suppose que cette application est une bijection. Montrer que H est isomorphe à G.