Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 18 octobre 2006

1

Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations.

2

Soit X un ensemble fini, et G un groupe fini agissant sur X. Pour tout $x \in X$ on note Gx l'orbite de x sous l'action de G, G_x le stabilisateur de x, et X^g l'ensemble des éléments de G qui laissent x invariant. Le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$. L'ensemble des orbites de G dans X est noté $\frac{X}{G}$

2.1. Montrer que $|G/G_x| = |Gx|$.

2.2. Formule de Cauchy. On veut montrer que le nombre d'orbites de l'action de G sur X est égal à la moyenne pour $g \in G$ des cardinaux des ensembles Autrement dit:

$$|\frac{X}{G}| = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

2.2.1. Montrer que la formule de Lagrange est un cas particulier de cette relation.

2.2.2. Montrer que $\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |G_x|$.

2.2.3. Montrer la formule de Cauchy.

2.2.4. Déterminer le nombre de coloriages du cube par trois couleurs qui ne sont pas équivalents à rotation près.

2.2.5. Déterminer le nombre de colliers de perles distincts, ayant 6 perles, chaque perle ayant 3 couleurs possibles.

3. Encore des colliers...

On appelle *collier* à n perles et k couleurs une classe d'équivalence de mots de longueur n dans un alphabet à k lettres, deux mots étant équivalents si et seulement si on peut obtenir l'un de l'autre par permutation circulaire. Autrement dit, un collier est une orbite de l'action de C_n, le groupe groupe cyclique à n éléments, agissant par permutations circulaires sur les mots à n lettres. Notons $a(n, k)$ le nombre de ces orbites.

3.1. Soit $g \in C_n$ le décalage circulaire de 1 cran vers la droite, de sorte que $C_n = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, déterminer l'ordre de g^i en fonction du pgcd de i et de n. Déterminer le nombre de cycles dans la décomposition en cycles de la permutation g^i.

3.2. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, déterminer $|X^{g^i}|$, puis $a(n, k)$.

3.3. Montrer que si $n = p$ est premier, alors $a(p, k) = \frac{1}{p}((p-1)k + k^p)$.

3.4. Pour tout entier m, notons $\phi(m)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et m et premiers à m. Calculer $\phi(x)$ pour $x = 1, \ldots, 12$.

3.5. Soit d un diviseur de n. Montrer que le nombre d'éléments d'ordre d dans C_n est égal à $\phi(d)$

3.6. Montrer que $a(n, k) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) k^{n/d}$.

3.7. Théorème de Polya. On conserve les notations de l'exercice précédent. A toute permutation g, on associe $c_i(g)$, le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition de g.

Soit G un groupe fini agissant par permutation sur un ensemble fini A de cardinal $|A| = n$. Considérons

$$Z_G(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X_1^{c_1(g)} X_2^{c_2(g)} \ldots X_n^{c_n(g)}.$$

Soit B un ensemble fini. Monter que G agit naturellement sur l'ensemble des fonctions de A dans B, et montrer que le nombre d'orbites de cette action est $Z_G(|B|, |B|, \ldots, |B|)$.