Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 22 novembre 2006

1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $F^\perp$ l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur F. Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* et déterminer sa dimension.

2

Soient a et b deux nombres complexes et $f\ :\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f(z)=az+b\bar{z}$. Montrer que f induit un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, dont on explicitera le noyau et l'image.

3

Soit A un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel. Montrer que $\mathrm{Id}+A$ est inversible.

4

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'idéal engendré par P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa dimension. On suppose $n>6$ et $P(X)=(X-1)^2(X-2)^3(X-3)$. Donner une base de ce sous-espace.

5

On considère l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ des matrices à coefficients complexes, à n lignes et p colonnes, sur lequel agit le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_{np}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C})\\ (U,V,M) & \longmapsto & UMV\end{array}$$

Exhiber une représentant de chaque orbite.

Remarque : Le vocabulaire utilisé pour exprimer la question ci-dessus est volontairement abscon. Commencer donc par formuler une question équivalente en termes plus explicites.

6

6.1. Soit J une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer J^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

6.2. Soit $a\in\mathbb{R}$. Développer $P(X)=\det(X\cdot\mathrm{Id}+a\cdot J)$.

6.3. Soit D une matrice diagonale, calculer $\det(J+D)$.

7

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.